COLOCANDO ORDEM NOS COMPLEXOS

Raimundo Bastos[1], Eudes Antonio da Costa[2]

[1]Doutorando em Matemática na UnB, Brasília, DF. [2]Professor de Matemática da UFT, Arraias, TO. E-mail: eudes@uft.edu.br

RESUMO
Sabe-se que os números reais, $(\mathbb{R}, \leq)$, é um conjunto ordenado, bem como é um corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ordenado. Neste mostraremos que o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, pode ser ordenado. No entanto, o corpo complexo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ não pode ser ordenado.
Palavras-chave: corpo real, corpo complexo e ordem.

ORDERING THE COMPLEX NUMBERS

ABSTRACT
It is well known that the field of real numbers, $(\mathbb{R}, \leq)$, is an ordered, set and field, by the usual order $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. In this we show that the set of complex numbers, $\mathbb{C}$, can be ordered. However, the complex field $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ can not be ordered.
Keywords: real field, complex field and order.

INTRODUÇÃO

É comum, ouvirmos alunos de Matemática, e por fim professores do ensino fundamental e médio, dizerem que os reais *é ordenado* e os complexos *não é*.

Em Monteiro (1969) mostra-se que o corpo dos números reais é ordenado pela ordem usual $(\leq)$. Mas quanto aos números complexos, os números complexos são ordenados? Ou, o ``mundo dos números complexos'' pode ser ordenado?

Quanto ao fato do conjunto dos números reais ser ordenado, ou ainda, os reais $(\mathbb{R},+,.,\leq)$ é um *corpo ordenado*[1], parece não pairar nenhuma dúvida; ou seja, ``o mundo dos números reais é ordenado''. Mas é correto afirmarmos que *os números complexos não pode ser ordenado*? Assumimos que nosso leitor conhece as propriedades de corpo e que o conjunto dos números reais com as operações usuais de adição e multiplicação é um corpo. Para este fim veja Monteiro (1969) ou Lima (2002).

Inicialmente, entendemos por número complexo um elemento do conjunto $\mathbf{C} = \{a + bi: \sqrt{}$ i=-1}. O conjunto $\mathbf{C}$, munido das operações usuais de adição e multiplicação, $(\mathbf{C},+,.)$, é o corpo dos números complexos.

ORDEM EM UM CONJUNTO

O que significa um conjunto ser ordenado? Ou melhor, quando (em que circunstâncias) um conjunto é ordenado? Aqui consideramos A um conjunto não vazio.

Definição 1. Uma relação de ordem em um conjunto *A* é um subconjunto *R*, de $A \times A$, cujos elementos satisfazem as seguintes condições:

[1] Em Monteiro (1969) pode-se aprofundar o estudo sobre corpos e corpos ordenados.

(1) para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$ (reflexiva);

(2) se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ então $x =_R y$ (antissimétrica);

(3) se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ então $(x,z) \in R$ (transitiva).

Dizemos que (A,R) é um conjunto (parcialmente) *ordenado*.

(4) Se $(x,y) \in R$ é um conjunto ordenado tal que para quaisquer $x,y \in A$ tivermos: ou $(x,y) \in R$ ou $(y,x) \in R$ (quaisquer dois elementos são comparáveis), diremos que (A,R) é um conjunto *totalmente ordenado*, ou ainda, que a ordem *R* é total (ou linear) em *A*.

Exemplo 1. Seja *A* um conjunto. Entendemos por P(*A*) o conjunto das partes de *A*. O conjunto P(*A*) é parcialmente ordenado pela relação de inclusão $(\subseteq)$. É claro que se *A* não for unitário, então a ordem $(\subseteq)$ não é total, pois para $x,y \in A$, como $x \neq y$ temos que $\{x\},\{y\} \in P(A)$ e não temos $\{x\} \subset \{y\}$, nem $\{y\} \subset \{x\}$.

Exemplo 2. Sejam $\mathbf{N}$ o conjunto dos números naturais e a relação ``menor que ou igual''$(\leq)$, então $(\mathbb{N},\leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, visto que, para quaisquer $m,n \in \mathbf{N}$ temos que $m \leq n$ ou $n \leq m$, ou seja, nos naturais a ordem $(\leq)$ é total. A relação ``menor que ou igual'' $(\leq)$ é a ordem ``usual'' em $\mathbf{N}, \mathbb{Z}, \mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$.

Exemplo 3. Ainda em $\mathbf{N}$, considere a relação ``divide'' dada por $n|m$ se, e somente se, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $m = kn$. É fácil verificar que

$(\mathbb{N}, |)$ é uma ordem. Porém tal ordem não é total; visto que 2 e 5 são números naturais. Porém nem $2 | 5$ nem $5 | 2$.

Quando dizemos que um conjunto é ordenado (parcial ou total), deve-se estar claro qual ``ordem'' (relação) está considerando.

Definição 2. Seja $(C, +, .)$ um corpo. Uma ordem total $(\preccurlyeq)$ definida no corpo *C* é dita compatível com as operações de adição e multiplicação de *C* se, para todo $x, y, z \in C$, temos:

(a) se $x \preccurlyeq y$ então $x + z \preccurlyeq y$ +z, para qualquer z ;

(b) se $0 \preccurlyeq x$ e 0$\preccurlyeq y$ então $0 \preccurlyeq xy$.

Em tal caso diremos que o corpo $(C, +, ., \preccurlyeq)$ é ordenado.

Observação 1. No corpo dos números reais, $(\mathbb{R}, +, .)$, a relação de ordem menor ou igual ($\leq$) satisfaz as condições da Definição 2. Com isso, dizemos que $\mathbf{R} = (\mathbf{R}, +, ., \leq)$ é um corpo ordenado. Acreditamos que, quando alguém diz: ``$\mathbf{R}$ é ordenado'', é isto implicitamente que está dizendo, ``os reais $(\mathbf{R}, +, ., \leq)$ é um corpo ordenado''.

Para o corpo dos complexos, $\mathbf{C} = (\mathbb{C}, +, .)$, vale o seguinte resultado:

Teorema 1. Nenhuma relação de ordem total definida no corpo dos números complexos, $(\mathbb{C}, +, .)$, é compatível com as operações usuais de adição e multiplicação definidas em $\mathbf{C}$.

Antes de apresentarmos a prova, veremos que o conjunto dos números complexo $\mathbf{C}$ pode ser totalmente ordenado.

ORDEM NO CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

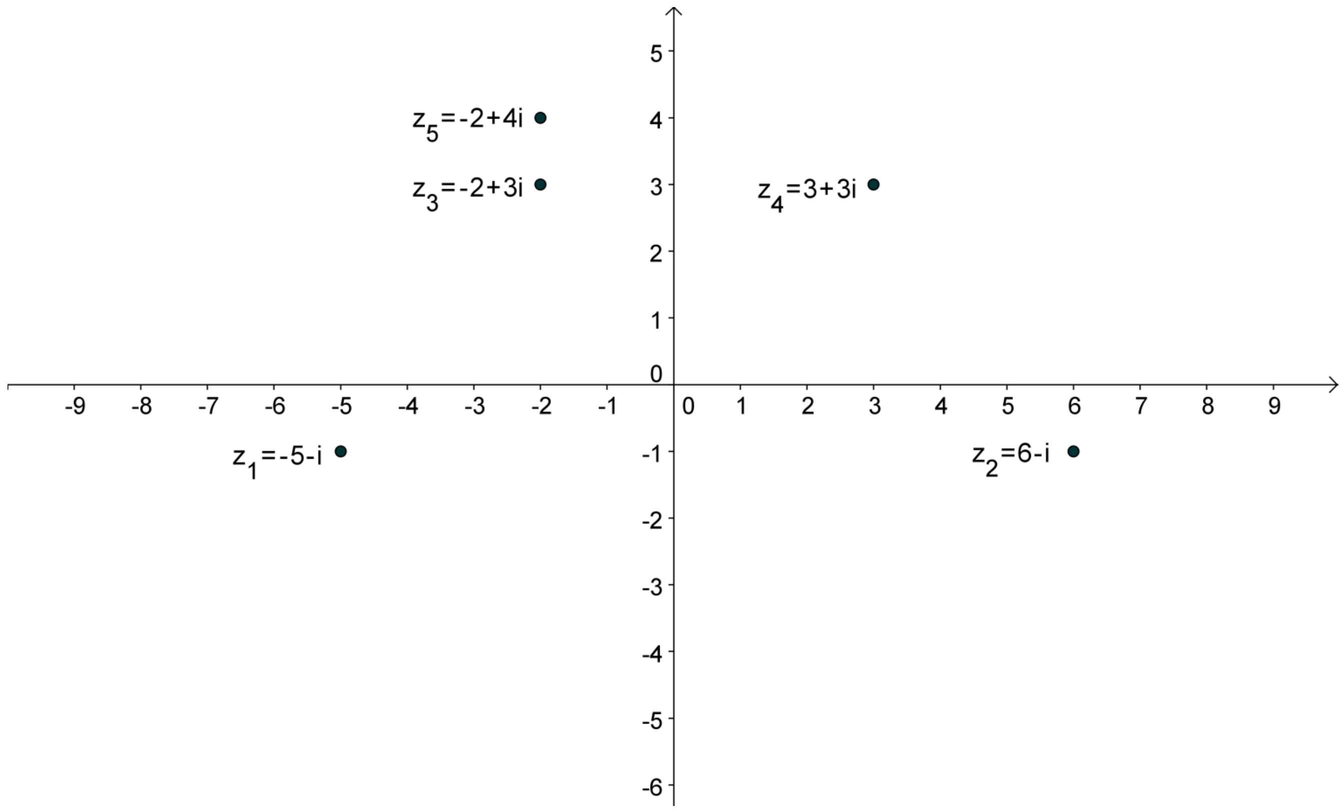
A seguir apresentamos, a título de exemplo, duas ordens (total) no conjunto dos números complexos não compatível com a estrutura de corpo.

A relação $R_1 = \{(a + bi, c + di): b < d \ \ ou \ \ b = d \ \ e \ \ a \leq c\}$, definida no conjunto dos números complexos, é uma relação de ordem, pois satisfaz todas as condições da Definição 1. Esta é a

Ordem Lexicográfica (*à Direita*) em $\mathbf{C}$.

Indicaremos a relação de Ordem Lexicográfica por $z_1 \preccurlyeq z_2$ no lugar de escrever $[(z]_1, z_2)$ pertence à relação R_1, Se $z_1 \preccurlyeq z_2$ diremos que z_1 ``precede'' z_2.

Exemplo 4. Dados $z_1 = -5 - \mathrm{i}$, $z_2 = 6 - \mathrm{i}$, $z_3 = -2 + 3\mathrm{i}$, $z_4 = 3 + 3\mathrm{i}$ e $z_5 = -2 + 4\mathrm{i}$. Temos $z_1 \preccurlyeq z_2 \preccurlyeq z_3 \preccurlyeq z_4 \preccurlyeq z_5$, conforme figura abaixo.



O número complexo $z_1 = a + bi$ precede o número complexo $z_2 = c + di$, se ambos estiverem sobre a mesma ``reta horizontal'', ou seja $z_1$ esta à esquerda de $z_2$, ou ainda se $z_1$ estiver ``abaixo'' de z_2 (imaginando-os projetados no eixo y).

A *ordem lexicográfica* é uma ordem total no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Uma ``fila'' associada a R_1 pode ser imaginada interpretando-se os números complexos como pontos do plano cartesiano. Portanto, o conjunto dos números complexos $(\mathbb{C}, \preccurlyeq)$ é totalmente ordenado.

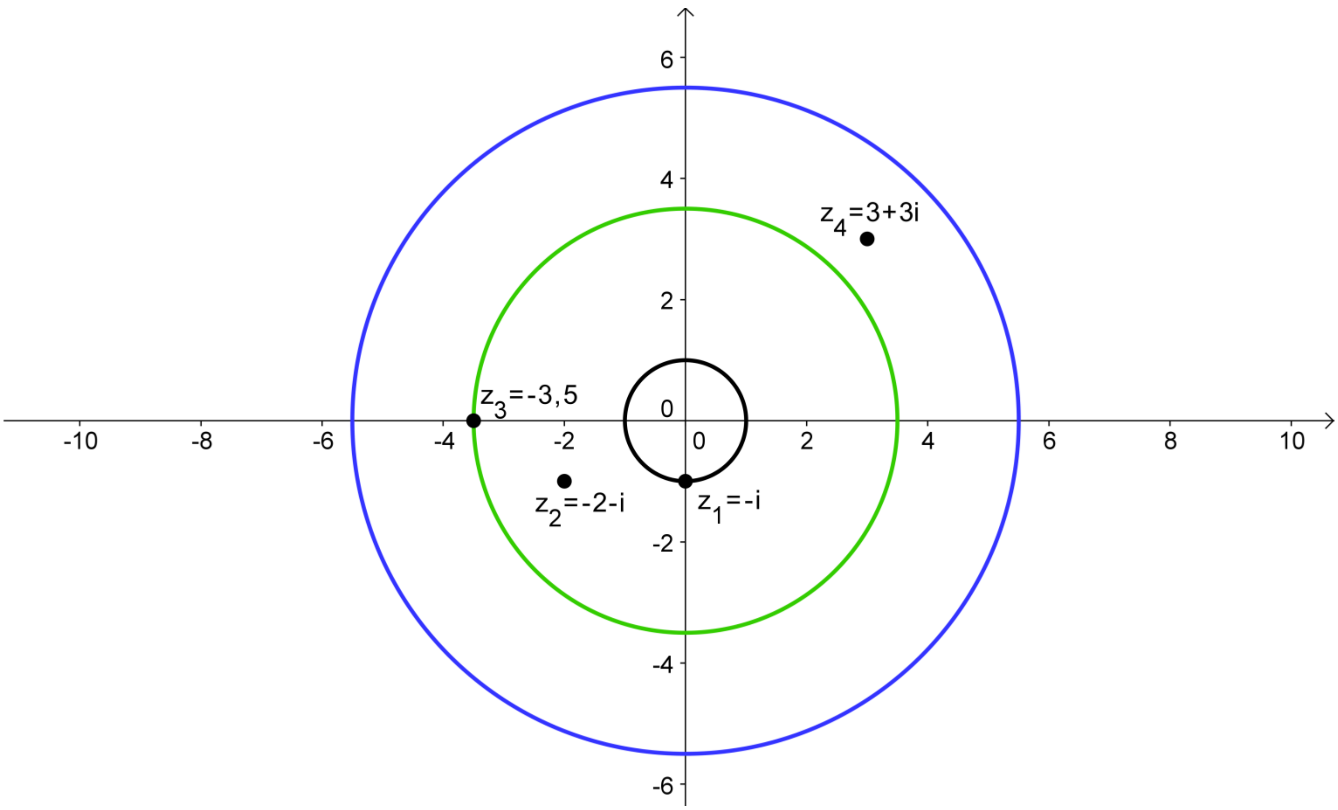
Observação 2. O corpo $(\mathbb{C}, +, \cdot, \preccurlyeq)$, no entanto, não é ordenado. Suponhamos que fosse; temos que $0 \preccurlyeq i$, assim multiplicando por i temos, $0 \preccurlyeq i.i = -1$, um absurdo, visto que $-1 = -1 + 0i \preccurlyeq 0 = 0 + 0i$.

Agora usaremos os números complexos, $z = a + bi \in \mathbb{C}$,em sua forma polar, ou seja, na forma $z = r(\cos\theta + i\, sen\,\theta)$, sendo $0 \leq r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta \in \mathbb{R}$; chamamos r o módulo, ou a norma, do número complexo z e θ o argumento de z .

Consideraremos agora uma ordem que contempla apenas a distância até a origem $0 = 0 + 0i$.

Dados $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$ consideramos respectivamente suas normas $0 \leq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ .. A relação $R_2 = \{(a + bi, c + di) : r_1 \leq r_2\}$ definida no conjunto dos números complexos é também uma relação de ordem. Esta é a *Ordem Modular* em $\mathbb{C}$. Indicaremos a relação de *Ordem Modular* por $z_1 \lesssim z_2$, se e somente se $r_1 \leq r_2$. Se $z_1 \lesssim z_2$ diremos que z_1 têm módulo igual ou menor que z_2 .

Exemplo 5. Dados os números complexos $z_1 = -i$, $z_2 = -2 - i$, $z_3 = -3 + 5i$, e $z_4 = 3 + 3i$, temos que $z_1 \lesssim z_2 \lesssim z_3 \lesssim z_4$, observe a figura abaixo.



Geometricamente, ou ``graficamente'', vemos que $z_1 \lesssim z_2$, se $z_1$ estiver em um círculo ``interior'' ao círculo que contém z_2, ou seja, um círculo com raio menor. Veja ainda que a ordem modular $(\lesssim)$ é uma ordem total no conjunto dos números complexos, ou seja, o conjunto $(\mathbb{C}, \lesssim)$ é totalmente ordenado.

Observação 3. O corpo $(\mathbb{C}, +, ., \lesssim)$ não é ordenado. Caso fosse, como temos: $3 + 4i \lesssim -4 + 4i$, assim deveríamos ter $(3 + 4i) + (4 - 4i) \lesssim (-4 + 4i) + (4 - 4i)$ o que acarretaria que $7 \lesssim \mathbf{0}$, um absurdo; pois claramente, $0 \lesssim z$ para qualquer $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

PROVA DO TEOREMA 1

Suponha que uma relação de ordem total $(\precsim)$ seja compatível com as operações de adição e multiplicação do corpo $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, .)$.

Afirmamos que $0 \precsim z^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$. De fato, pela definição de *ordem total*, item (4) da Definição 1, qualquer que seja o número complexo *z*, temos $0 \precsim z$ ou $z \precsim \mathbf{0}$. Se $0 \precsim z$, pela condição (b) da Definição 2, obtemos $0.z \precsim z.z$, ou $0 \precsim z^2$. Se $z \precsim \mathbf{0}$, usando a condição (a) da Definição 2, obtemos $z - z \precsim 0 - z$ ou $0 \precsim -z$. Agora, usando novamente a condição (b) da Definição 1, temos $\mathbf{0}(-z) \precsim (-z)(-z)$ ou $0 \precsim z^2$. E nossa afirmação é válida.

Assim, $0 \precsim z^2$, qualquer que seja o número complexo z. Em particular, $0 \precsim (1 + 0i)^2$ e $0 \precsim (0 + i)^2$ o que acarreta que $0 \precsim \mathbf{1}$ e $0 \precsim -\mathbf{1}$.

Mas, usando a condição (a) Definição 2, de $0 \lesssim -1$, obtemos $0+1 \lesssim -1+1$, ou seja, $1 \lesssim 0$.

Portanto temos que $0 \lesssim 1$ e $1 \lesssim 0$. o que contraria a condição (2) da Definição 1, visto que $0 \neq 1$. Esta contradição garante que nenhuma relação de ordem (total) definida em $\mathbb{C}$ pode ser compatível com as operações de adição e multiplicação. Como Queríamos Demonstrar.

Para qualquer Corpo Ordenado $C = (C, +, \cdot, \preccurlyeq)$ pode-se mostrar as seguintes propriedades[2]:

Propriedade 1. Num corpo ordenado *C* e para $x \in C$, $0 \preccurlyeq x$ se, e somente se, $-x \preccurlyeq 0$.

Propriedade 2. Num corpo ordenado *C*, o quadrado de todo elemento não nulo é positivo, isto é, se $x \neq 0$ então $0 \preccurlyeq x^2$.

Propriedade 3. Em todo corpo ordenado *C*, tem-se $0 \preccurlyeq 1_C$ e $-1_C \preccurlyeq 0$.

Observação 4. Uma prova alternativa do Teorema 1 pode ser obtida usando as propriedades acima. Temos $i^2 = -1$, caso $\mathbb{C}$ fosse um corpo ordenado, o número -1 seria negativo (Proposição 3) e positivo (Proposições 1 e 2), portanto uma *contradição*.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Olhando o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como subconjunto dos complexos $\mathbb{C}$, temos que a ordem Lexicográfica em $\mathbb{C}$ é compatível com a ordem usual, $(\leq)$, nos reais. Claramente dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ temos (olhando como número complexo) $a_1 = a_1 + 0i \preccurlyeq a_2 = a_2 + 0i$, se e apenas se, $a_1 \leq a_2$.

Agora, a ordem modular $(\lesssim)$ em $\mathbb{C}$ não é compatível com a ordem usual $(\leq)$ nos reais. Tomemos -5 e 2 $\in \mathbb{R}$, temos $2 \lesssim -5$ pois $2 = \sqrt{2^2 + 0^2} \leq \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$. No entanto, em $\mathbb{R}$, temos que $-5 \leq 2$.

Na ordem Lexicográfica em $\mathbb{C}$ não existem elementos distintos equivalentes (iguais relativos à ordem), visto que, $a + bi \preccurlyeq c + di$ e $c + di \preccurlyeq a + bi$ se, e apenas se, $a = b$ e $c = d$. No entanto existem em $\mathbb{C}$ elementos distintos com a mesma norma; por exemplo $1 \lesssim i$ e $i \lesssim 1$, assim têm que $1 =_{\lesssim} i$, são equivalentes nesta ordem.

Ao dizermos que ``os complexos não podem ser ordenados" não estamos sendo nem corretos, nem precisos. Pois segue da Seção 3 que o conjunto dos números complexos pode ser totalmente ordenado. No entanto pelo Teorema 1 temos que o corpo dos números complexos não é ordenado.

Por fim, como sabemos, os reais $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado, no entanto $(\mathbb{R}, +, \cdot, \lesssim)$ não é um corpo ordenado. Aliás Monteiro (1969) mostra que a ordem usual, $(\leq)$, é a única que torna os reais um corpo ordenado.

REFERÊNCIAS

LIMA, E. L. Análise real. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA-SBM, 2002. vol.1.

MONTEIRO, L. H. J. Elementos de álgebra. Rio de Janeiro: IMPA-Livro Técnico, 1969.

[2] Veja em Lima (2002) o caso em que o corpo C é o real.