http://journal.unoeste.br/index.php/ce/index
DOI: 10.5747/ce.2021.v13.n2.e363
ISSN on-line 2178-8332

Colloquium Exactarum

Submetido: 29/07/2021 Revisado: 09/08/2021 Aceito: 09/09/2021

QUATÉRNIOS: GENERALIZAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA PERSPECTIVA DO USO DO SOFTWARE EDUCATIVO GEOGEBRA E O SOFTWARE ON-LINE LIVRE QUATERNION

Quaternion: Generalization of Complex Numbers in the perspective of the use of GeoGebra Free Educational Software and QUATERNION Free On-line Software

Alessandro Ribeiro da Silva, Renato César da Silva, Edivaldo Romanini.

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS
E-mail: alessandro.ribeiro@ufms.br .

RESUMO – O presente artigo foi realizado no âmbito do Programa de Educação Tutorial (PET Conexões de Saberes Matemática), do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) - Campus de Três Lagoas (CPTL). Nosso objetivo foi apresentar tanto a consolidação dos Números Complexos (1833) e a classe dos hiper complexos Quatérnios (1843), ambos conceituados por Sir William Rowan Hamilton, bem como utilizar o Software Educativo Livre GeoGebra e o Software Livre on-line QUATERNION, como recursos pedagógicos alternativos facilitando o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos abstratos.
Palavras-chave: Quatérnios; Softwares Educativos Livres; Ensino de Matemática.

ABSTRACT – This article was carried out under the Tutorial Education Program (PET Mathematical Knowledge connections), of the Mathematics Degree Course at the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS) - Três Lagoas Campus (CPTL). Our objective was to present both the consolidation of Complex Numbers (1833) and the class of hyper-complex Quaternions (1843), both conceptualized by Sir William Rowan Hamilton, as well as using the Free Educational Software GeoGebra and the Free Online Software QUATERNION, as alternative pedagogical resources facilitating the development of the teaching and learning process of abstract mathematical content.
Keywords: Quaternion; Free Educational Software; Mathematics Teaching.

1. INTRODUÇÃO

William Rowan Hamilton, no dia 4 de novembro de 1833, apresentou à Academia Real Irlandesa um artigo com o tema “Teoria das Funções Conjugadas, ou Pares Algébricos; com Ensaio Preliminar e Elementar sobre a Álgebra como uma Ciência do Tempo Puro”, estruturando a álgebra dos Números Complexos e possibilitando a compreensão da soma $a + bi$ (NEVES, 2008, p. 9 – 10).

Dessa forma, foi estabelecido o par ordenado do tipo $(a, 0)$, no qual representa somente a parte real a, e da mesma forma o par ordenado $(0,1)$, que representa somente a unidade imaginária, denotada por i, onde foi possível escrever: $i^2 = (0,1) * (0,1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 + 1 * 0) = (-1,0) = -1$, em que, finalmente houve uma explicação lógica para $\sqrt{-1}$. (GUEDES JUNIOR et al, 2016).

Neste contexto, segundo Neves (2008, p. 10), que afirma que:

Hamilton construiu uma estrutura algébrica para os "pares algébricos ou numéricos" (x, y), similar a dos números complexos $x + iy$, de modo que tais números pudessem ser identificados pela relação - essa relação é encontrada nos livros didáticos de matemática do ensino médio $(x, y) = (x, 0) + (0,1)(y, 0) = x + iy$. No final do artigo, Hamilton revelou que pretendia estender seus resultados em busca de uma "Teoria de Tripletos" (x, y, z), - Hamilton usou a expressão “triplets”. Por já ter sido consagrado nos textos em língua portuguesa, usaremos a expressão “tripletos”, já com a intenção de obter um modelo analítico para o espaço.

Quadro 1. Operações com os Números Complexos consolidado por Hamilton.

Igualdade
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e b= d
Adição
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
Multiplicação
$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$; em que * indica o produto entre dois objetos matemáticos (nesse caso, os complexos).

Fonte: (Guedes Junior et al., 2016).

Dessa forma, houve a aceitação da álgebra dos Números Complexos pelos grandes matemáticos do século XIX, tornando possível realizar no plano transformações através das operações de adição determinando a translação, e, multiplicação determinando a rotação de corpos rígidos sem alterar as propriedades do conjunto dos números reais.

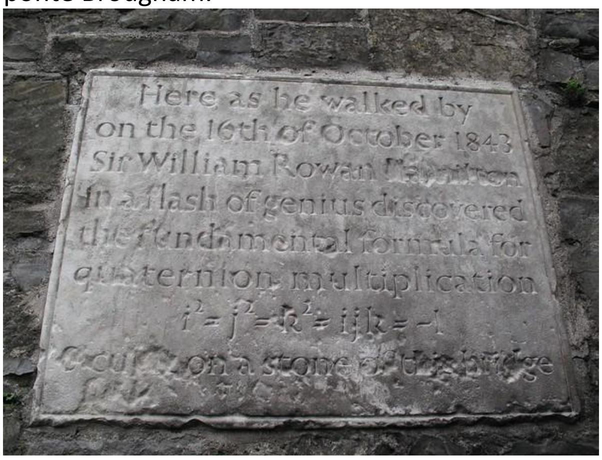
Hamilton, realizou seus estudos inicialmente utilizando como base a geometria através da multiplicação de tripletos (x, y, z), porém este processo não preservava a propriedade da distributividade, levando-o a realizar seu estudo algebricamente e deixando de lado a comutatividade da multiplicação. Passados anos, Hamilton estabeleceu do ponto de vista prático a solução desse problema que continuava sem respostas entre os matemáticos da época, onde em vez de três parâmetros ele passou a considerar quatro parâmetros para obter a rotação de objetos no espaço tridimensional.

Hamilton na tentativa de definir a multiplicação de tripletos (x, y, z), fazendo uso das mesmas propriedades dos pares numéricos (x, y), se deparou com o fator ij obtendo a não comutatividade nessa operação, a partir dessa manipulação algébrica surgiu um novo elemento $k = \sqrt{-1}$, que por sua vez é perpendicular simultaneamente a i e j, estabelecendo a Álgebra dos Quatérnions (SANTOS, 2013).

> Assim, a invenção dos quatérnios propicia uma ruptura entre a álgebra e a aritmética, e estabelece que é possível a concepção de uma teoria algébrica que não leve em conta as propriedades aritméticas, neste caso, a propriedade comutativa da multiplicação. Além disso, para operar no espaço de dimensão três foi preciso empregar uma estrutura de espaço de dimensão quatro. É o surgimento da Álgebra Moderna (SANTOS, 2013, p. 32).

Para tanto, no dia 16 de outubro de 1843, Sir William Rowan Hamilton, como era conhecido, caminhava ao longo do Royal Canal, e quando passava pela ponte Brougham obteve repentinamente a fórmula fundamental do tripleto. Com seu canivete Hamilton cravou na pedra $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Figura 1. Placa homenageando Hamilton na ponte Brougham.



Fonte: [4887887424_39c6b2f6c7_z.jpg (640×480) (flickr.com)]

2. METODOLOGIA

O presente trabalho, realizado no âmbito do grupo PET Conexões de Saberes Matemática CPTL/UFMS, originou-se a partir do projeto de pesquisa “Ensino e aprendizagem de matemática não só como a arte pela arte, mas também, como modelos representativos do mundo real: Saberes e práticas dos professores em formação inicial e continuada”, nos quais, os professores da presente pesquisa são colaboradores.

Logo, o objetivo deste estudo foi apresentar tanto a consolidação dos Números Complexos e a Classe dos Hiper Complexos denotado por Quatérnios, ambos conceituados por Sir William Rowan Hamilton, bem como utilizar o Software Educativo Livre GeoGebra e o Software Livre on-line QUATERNION, como recursos pedagógicos alternativos facilitando o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos abstratos.

Para tanto, foi realizado um estudo de referenciais teóricos consolidados sobre a Classe dos Quatérnios. Neste contexto tivemos como base os autores, a saber: Guedes Junior et al. (2016), Neves (2008, 2014), Santos (2013). Ainda, autores como: Gomes (2002), Silva (2019), Ferreira (2012), Soffa e Alcântara (2008), defendendo a utilização de Softwares (consideraremos Softwares com o mesmo significado de Softwares Educativos Livres ou Softwares on-line Livre) como formas diferenciadas para abordar conceitos abstratos no ensino e aprendizagem de matemática nos diversos níveis do ensino.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Aplicação Números Complexos

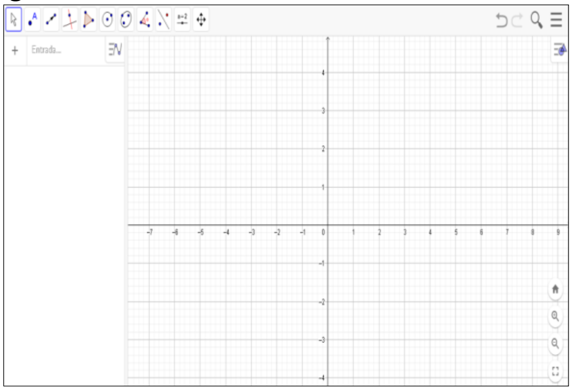
Utilizando a formulação dos Números Complexos conceituado por Sir William Rowan Hamilton, e ainda, fazendo uso do Software GeoGebra como recurso metodológico alternativo para o ensino e aprendizagem de matemática; podemos considerar a seguinte questão exemplar:

“Dado um Número Complexo qualquer no Plano Complexo (Argand-Gauss ou Diagrama de Argand), construir utilizando as ferramentas do software GeoGebra Classic 5, um quadrado inscrito numa circunferência”.

Solução

A figura 2, apresenta a tela inicial do Software GeoGebra Classic 5.

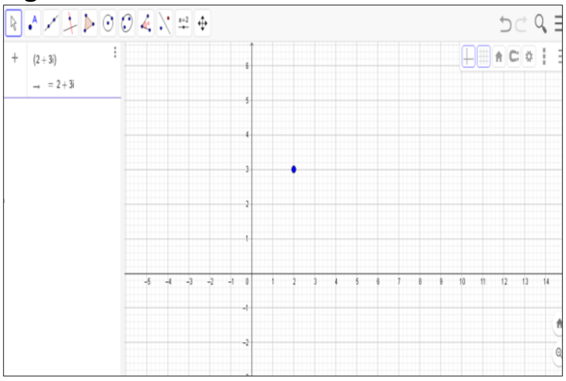
Figura 2



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura 3, escrevemos as coordenadas conforme consolidada por Hamilton, onde (a, b) são “pares algébricos ou numéricos” (NEVES, 2008).

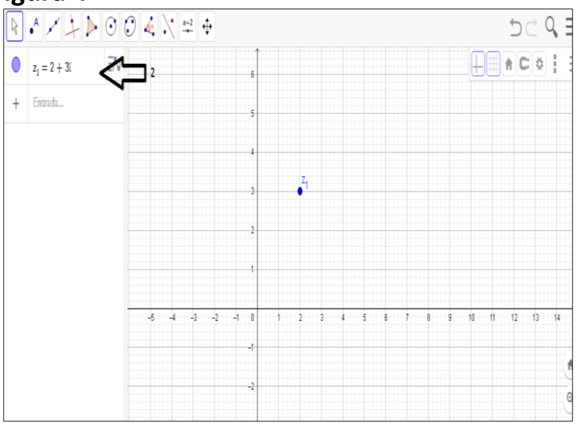
Figura 3



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura 4, após prosseguir com o comando na janela algébrica o programa constrói os Números Complexos conforme a definição mais usual encontrada nos livros ($z_1 = 2 + 3i$).

Figura 4

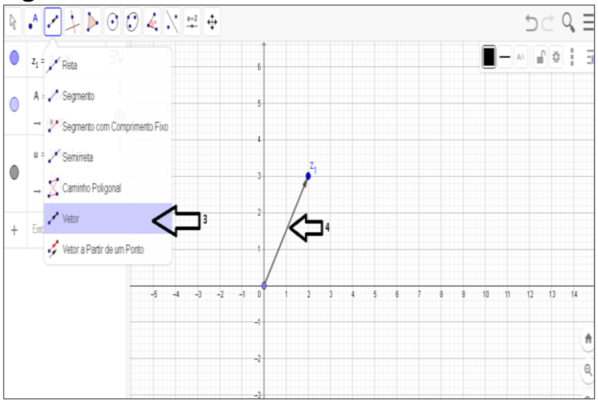


Fonte: Elaborada pelos autores.

Logo, na figura 5, construímos um vetor ligando o ponto de origem com a extremidade de

“$(2, 3i)$”, para representar melhor a visualização da construção pretendida. Utilizando a ferramenta “Vetor” do GeoGebra Classic 5. Assim sendo, basta seguir o comando “selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade”.

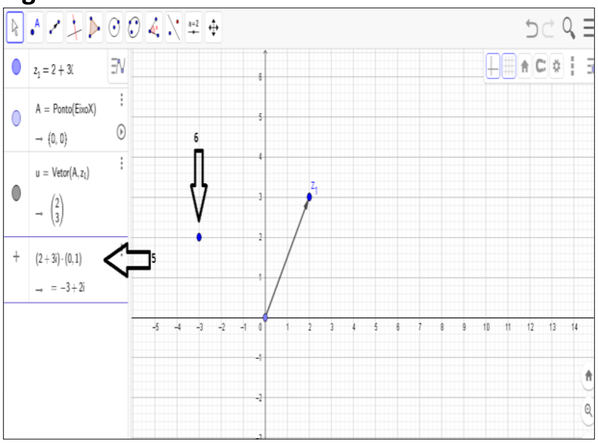
Figura 5



Fonte: Elaborada pelos autores.

Prontamente na figura 6, especificamente na janela algébrica é acionado o novo Número Complexo em forma de “pares algébricos”. Novamente, tal número imaginário é construído conforme a definição mais usual encontrada nos livros ($z_2 = -3 + 2i$).

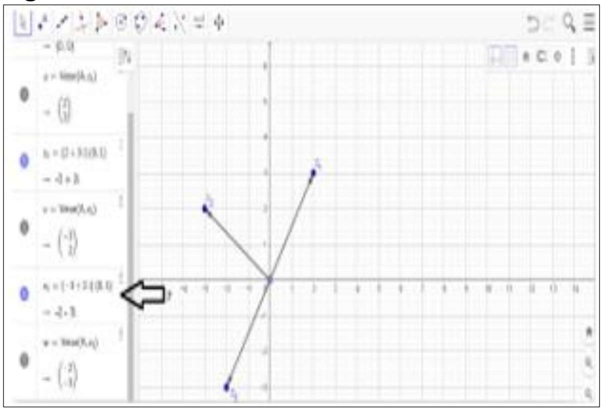
Figura 6



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura 7, apresentamos os números imaginários na sua forma usual, e ainda, criamos um novo número complexo ($z_3 = -2 - 3i$), bem como, seus vetores correspondentes facilitando a visualização da construção pretendida, conforme ilustra a figura.

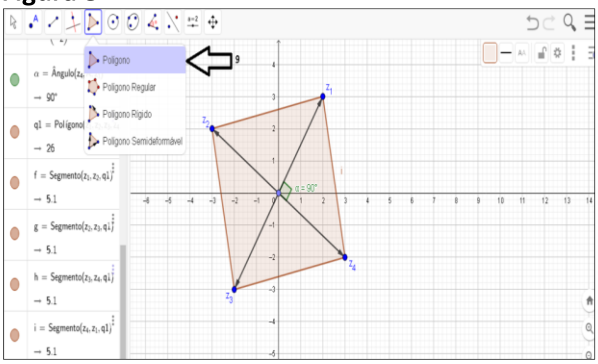
Figura 7



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura 8, construímos um quadrado com a ferramenta “polígonos regulares” seguindo os respectivos comandos “selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente”. Utilizamos a ferramenta “ângulo” seguindo os respectivos comandos “selecione 3 (três) pontos ou 2 (duas) retas” para mostrar a angulação entres os vetores criados anteriormente (neste caso, o ângulo que correspondente é igual a 90º graus).

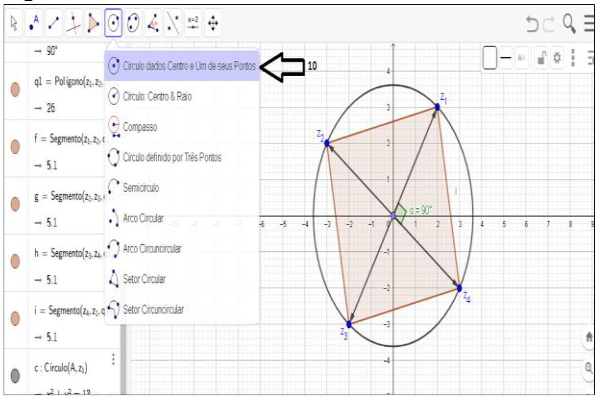
Figura 8



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na figura 9, com auxílio da ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” construímos uma circunferência, através dos respectivos comandos “selecione o centro e, depois, um ponto do círculo”, assim é criada uma circunferência inscrita no quadrado.

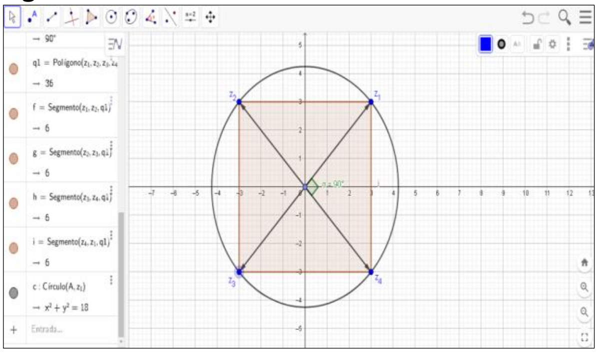
Figura 9



Fonte: Elaborada pelos autores.

Portanto, na figura 10, ilustramos a construção da atividade finalizada, sendo realizada uma pequena rotação de modo que os segmentos de retas $\underline{z_1 z_2}$ e $\underline{z_3 z_4}$, ficassem paralelos ao eixo dos números reais, facilitando a visualização da questão.

Figura 10



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para tanto, entendemos que os Números Complexos conceituados a décadas, podem ser facilmente trabalhados dentro da sala de aula, quando, educadores de Matemática no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos tem em mãos, recurso como a novas tecnologias educacionais em específico os Softwares Educativos Livres como o GeoGebra.

3.2 Classe dos Hiper Complexos Quatérnios

O conjunto dos Quatérnions, denotado por H, é definido como:
$H = \{a + bi + cj + dk\,; a, b, c, d \ \in R\,\}$, sendo $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Quando são realizadas operações de soma ou multiplicação entre quatérnios, e ainda, entre um escalar e um quatérnio, obtemos um fechamento desse conjunto de modo que, seus resultados sejam sempre pertencentes aos quatérnios.

Para definir os axiomas do espaço vetorial, temos $\forall \alpha, \beta \in R; \forall q, q_1, q_2 \in H$.

Propriedades que satisfazem a adição:
Comutatividade: $q + q_1 = q_1 + q$;
Associatividade: $(q + q_1) + q_2 = q + (q_1 + q_2)$;
Vetor Nulo: $q + 0 = q$;

Existência de Elemento Inverso Aditivo: $q + (-q) = 0$.

Propriedades que satisfazem a multiplicação:
Associatividade: $(qq_1)q_2 = q(q_1 q_2)$
Existência de Elemento Inverso Multiplicativo: $qq^{-1} = 1$;
Existência de Elemento Neutro: $q * 1 = q$.

Propriedade de um escalar por um quatérnio:
Associatividade: $\alpha(\beta q) = (\alpha\beta)q$;
Distributividade: $(\alpha + \beta)q = \alpha q + \beta q$;
Distributividade: $(q + q_1)\alpha = \alpha q + \alpha q_1$.

3.2.1 Operações com os Quatérnios

Igualdade entre Quatérnios

Sejam,
$q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$ e,
$q_1 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a_1, \overrightarrow{v_1}) \in H$,
então:

$$q = q_1 \Leftrightarrow (a = a_1) \text{ e } (\vec{v} = \overrightarrow{v_1})$$

Adição

Para realizar a adição com os quatérnios, devemos proceder igualmente como nos números complexos, somando as coordenadas correspondentes. A operação de adição é comutativa, associativa, possui elemento neutro e elemento inverso.

Sejam,
$q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$ e,
$q_1 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a_1, \overrightarrow{v_1}) \in H$,
então:
$q + q_1 = (a + bi + cj + dk) + (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a + a_1) + (b + b_1)i + (c + c_1)j + (d + d_1)k$.

Multiplicação

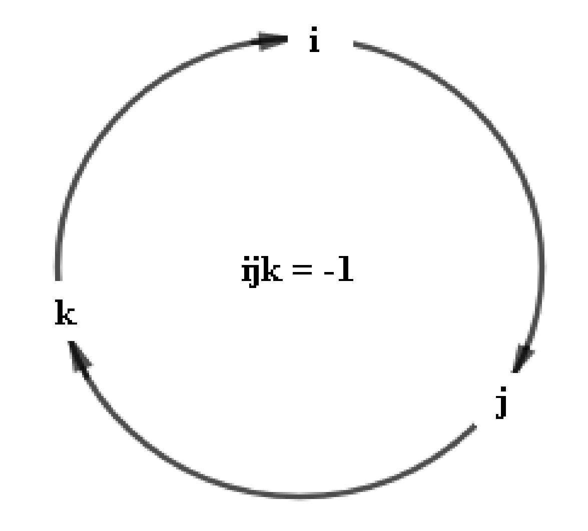
Para realizar a multiplicação dos quatérnios, as seguintes relações fundamentais foram definidas.

Definição 1:

- $ij = k \Rightarrow iij = ik \Rightarrow i^2 j = ik \Rightarrow (-1)j = ik \Rightarrow ik = -j$
- $jk = i \Rightarrow jjk = ji \Rightarrow j^2 k = ji \Rightarrow (-1)k = ji \Rightarrow ji = -k$
- $ki = j \Rightarrow kki = kj \Rightarrow k^2 i = kj \Rightarrow (-1)i = kj \Rightarrow kj = -i$

- $ij = k \Rightarrow ijk = kk \Rightarrow ijk = k^2 \Rightarrow ijk = -1$

Figura 11. Representação Gráfica da não Comutatividade da Multiplicação de Quatérnios.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 12. Representação Gráfica da não Comutatividade da Multiplicações de Quatérnios.

$\cdot$	1	i	j	k
1	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot i = i$	$1 \cdot j = j$	$1 \cdot k = k$
i	$i \cdot 1 = i$	$i \cdot i = -1$	$i \cdot j = k$	$i \cdot k = -j$
j	$j \cdot 1 = j$	$j \cdot i = -k$	$j \cdot j = -1$	$j \cdot k = i$
k	$k \cdot 1 = k$	$k \cdot i = j$	$k \cdot j = -i$	$k \cdot k = -1$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Desta forma, a multiplicação entre quatérnios é dada por:

Sejam,

$q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$ e,

$q_1 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a_1, \overrightarrow{v_1}) \in H$,

então:

$qq_1 = (a + bi + cj + dk)(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = a(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + bi(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + cj(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + dk(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = aa_1 + ab_1 i + ac_1 j + ad_1 k + bia_1 + bib_1 i + bic_1 j + bid_1 k + cja_1 + cjb_1 i + cjc_1 j + cjd_1 k + dka_1 + dkb_1 i + dkc_1 j + dkd_1 k = aa_1 + bb_1 i^2 + cc_1 j^2 + dd_1 k^2 + ab_1 i + ac_1 j + ad_1 k + ba_1 i + ca_1 j + da_1 k + bc_1 ij + bd_1 ik + cb_1 ji + cd_1 jk + db_1 ki + dc_1 kj = aa_1 - (bb_1 + cc_1 + dd_1) + a(b_1 i + c_1 j + d_1 k) + a_1(bi + cj + dk) + bc_1 k - bd_1 j - cb_1 k + cb_1 i + db_1 j - dc_1 i = aa_1 - (bb_1 + cc_1 + dd_1) + a(b_1 i + c_1 j + d_1 k) + a_1(bi + cj + dk) + (cd_1 - dc_1)i + (db_1 - bd_1)j + (bc_1 - cb_1)k.$

$qq_1 = aa_1 - (bb_1 + cc_1 + dd_1) + a(b_1 i + c_1 j + d_1 k) + a_1(bi + cj + dk) + (cd_1 - dc_1)i + (db_1 - bd_1)j + (bc_1 - cb_1)k.$ (1)

Os resultados obtidos em (1), podem ser expressos em termos de produtos escalares e vetoriais.

- $aa_1 - (bb_1 + cc_1 + dd_1) = aa_1 - \vec{v} \cdot \overrightarrow{v_1}$
- $a(b_1 i + c_1 j + d_1 k) + a_1(bi + cj + dk) = a\overrightarrow{v_1} + a_1\vec{v}$
- $(cd_1 - dc_1)i + (db_1 - bd_1)j + (bc_1 - cb_1)k = \vec{v} \times \overrightarrow{v_1}$
- $qq_1 = (aa_1 - \vec{v} \cdot \overrightarrow{v_1}) + (a\overrightarrow{v_1} + a_1\vec{v} + \vec{v} \times \overrightarrow{v_1})$; em que $\cdot$ indica o produto escalar e $\times$ o produto vetorial.

Norma de um Quatérnio

Seja, $q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$, definimos a norma ou valor absoluto de q, sendo o número não negativo, como segue:

$\|z\| = \sqrt{q\underline{q}} = \sqrt{a^2 + bi^2 + cj^2 + dk^2} = \sqrt{a^2 + |z|^2}$.

Conjugado

Seja, $q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$, definimos o conjugado de q, como:

$\underline{q} = (a - bi - cj - dk) = (a, -\vec{v}) \in H$.

Proposição 1: A relação entre o módulo e conjugado dos Quatérnios é dada por:

$q\underline{q} = \underline{q}q$.

Demonstração:

Sejam,

$q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$ e

$\underline{q} = (a - bi - cj - dk) = (a_1, -\overrightarrow{v_1}) \in H$, então:

$q\underline{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = (aa - abi - acj - adk) + (-abi - b^2 i^2 - bcij - bdik) + (-acj - bcji - c^2 j^2 - cdjk) + (-adk - bdki - cdkj - d^2 k^2) = [a^2 + (abi - abi) + (acj - acj) + (adk - adk)] + [-b^2(-1) - c^2(-1) - d^2(-1)] + [(bck - bck) + (bdj - bdj) + (cdi - cdi)] = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

$\underline{q}q = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = (aa - abi - acj - adk) + (-abi - b^2 i^2 - bcij - bdik) + (-acj - bcji - c^2 j^2 - cdjk) + (-adk - bdki - cdkj - d^2 k^2) = [a^2 + (abi - abi) + (acj - acj) + (adk - adk)] + [-b^2(-1) - c^2(-1) - d^2(-1)] + [(bck - bck) + (bdj - bdj) + (cdi - cdi)] = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

Portanto,

$\left\||z|\right\|^2 = q\underline{q} = \underline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

Proposição 2: Relações entre dois quatérnios conjugados:

$\underline{qq_1} = \underline{q}\underline{q_1}$

Demonstração:

Sejam,

$q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$ e

$q_1 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a_1, \overrightarrow{v_1}) \in H$,

então:

$qq_1 = (a + bi + cj + dk)(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)$.

$qq_1 = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) + (ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1)i + (ac_1 - bd_1 + ca_1 + db_1)j + (ad_1 + bc_1 - cb_1 + da_1)k$.

$\underline{qq_1} = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) - (ab_1 + ba_1 - cd_1 + dc_1)i - (ac_1 + bd_1 + ca_1 - db_1)j - (ad_1 - bc_1 + cb_1 + da_1)k$.

$\underline{q}\underline{q_1} = (a - bi - cj - dk)(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k)$.

$\underline{q}\underline{q_1} = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) + (-ab_1 - ba_1 - cd_1 + dc_1)i + (-ac_1 + bd_1 - ca_1 - db_1)j + (-ad_1 - bc_1 + cb_1 - da_1)k$.

$\underline{q}\underline{q_1} = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1) - (ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1)i - (ac_1 - bd_1 + ca_1 + db_1)j - (ad_1 + bc_1 - cb_1 + da_1)k$.

Quatérnios Unitários

Seja $q \in H$, um quatérnio unitário ou normalizado $|q| = 1$, temos que a inversa é o complexo conjugado:

$q^{-1} = \underline{q}$.

Quatérnios Inversos

Todo quatérnio diferente de zero tem um multiplicativo inverso. Portanto é definido:

$q^{-1}q = qq^{-1}$.

Considerando q^{-1} um quatérnio inverso à direita, para normalizar um quatérnio basta fazer a razão entre o quatérnio e seu módulo ao quadrado, vêm:

$$qq^{-1} = \frac{q\underline{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1$$

Considerando q^{-1} um quatérnion inverso à esquerda, vêm:

$$q^{-1}q = \frac{\underline{q}q}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1$$

Divisão entre quatérnios

Sejam,

$q = (a + bi + cj + dk) = (a, \vec{v}) \in H$ e

$q_1 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a_1, \overrightarrow{v_1}) \in H$,

definimos a divisão entre q e q_1, como:

Divisão a esquerda:

$$\frac{q}{q_1} = q_1^{-1} q$$

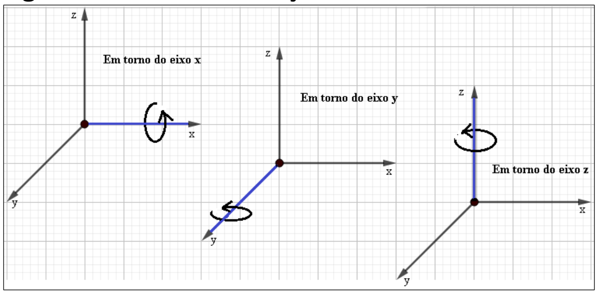
Divisão a direita:

$$\frac{q}{q_1} = q q_1^{-1}$$

3.2.2 Rotações com os Quatérnios

Operando um ponto no R^3 representado por um vetor $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$, com $\vec{r} \in R^3$ e transformando esse vetor num quatérnio q com $q \in H$, a parte escalar desse quatérnio será nula obtendo um quatérnio puro $p = (0, r)$. A rotação anti-horária do ângulo θ que será aplicado no eixo definido pelo vetor unitário $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é fundamental ser representada por um quatérnio unitário.

Figura 13. Eixos de Rotação



Fonte: Elaborada pelos autores.

Utilizaremos as Identidades do Cálculo Vetorial:

$$\vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$
$$s\vec{v} \times \vec{r} = -s\vec{r} \times \vec{v}$$
$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r}) = (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r}$$

A expressão de rotação de um quatérnio pode ser descrita como:

$q p \underline{q} = (s, \vec{v})(0, \vec{r})(s, -\vec{v}) = (s, \vec{v})(0s - \vec{r}(-\vec{v}), -0\vec{v} + s\vec{r} + \vec{r} \times -\vec{v} = (s, \vec{v})(\vec{r} \cdot \vec{r}, s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) = \big(s(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{v} \cdot (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}), s(s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) + (\vec{r}, \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v})\big) = \big(s(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{v} \cdot s\vec{r} - \vec{v} \cdot (-\vec{r} \times \vec{v}), s^2\vec{r} - s\vec{r} \times \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times s\vec{r} + \vec{v} \times (-\vec{r} \times \vec{v})\big) = \big(s(\vec{r} \cdot \vec{r}) - s(\vec{r} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v}), s^2\vec{r} + s\vec{v} \times \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + s\vec{v} \times \vec{r} + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})\big) = (\vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}), s^2\vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r} + (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r}) = (0, s^2\vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r} + 2(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r})$

Fazendo uso das Identidades do Cálculo Vetorial:

$$\vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$
$$s\vec{v} \times \vec{r} = -s\vec{r} \times \vec{v}$$
$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r}) = (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{v})\vec{r}$$

A expressão de rotação de um quatérnio pode ser descrita como:

$$q p \underline{q} = (s, \vec{v})(0, \vec{r})(s, -\vec{v}) = (s, \vec{v})(0s - \vec{r}(-\vec{v}), -0\vec{v} + s\vec{r} + \vec{r} \times -\vec{v} = (s, \vec{v})(\vec{r} \cdot \vec{r}, s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) = \big(s(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{v} \cdot (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}), s(s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) + (\vec{r}, \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v})\big) =$$
$$\big(s(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{v} \cdot s\vec{r} - \vec{v} \cdot (-\vec{r} \times \vec{v}), s^2\vec{r} - s\vec{r} \times \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times s\vec{r} + \vec{v} \times (-\vec{r} \times \vec{v})\big) =$$
$$\big(s(\vec{r} \cdot \vec{r}) - s(\vec{r} \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v}), s^2\vec{r} + s\vec{v} \times \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + s\vec{v} \times \vec{r} + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})\big) =$$
$$(\vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}), s^2\vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r} + (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r}) = (0, s^2\vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r} + 2(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r}). \qquad (2)$$

Por definição, vem:

$$q = cos\, cos\, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta\vec{n}$$
$$\underline{q} = cos\, cos\, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{2}\theta\vec{n}$$

Quando realizamos uma rotação no espaço é necessário fazer uma interpretação geométrica, então, sendo $q = (s, \vec{v})$ um vetor unitário. Portanto pela identidade fundamental da trigonometria, existe um θ tal que $s = cos\theta$, $\|v\| = sen\theta$ e $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \Leftrightarrow \|\vec{n}\| = 1$ onde o vetor $\vec{v}$ é um vetor diretor que representa uma rotação no espaço.

Por definição, vem:

$$q = (s, \vec{v}) = (cos\theta, sen\theta\vec{n})$$

Dessa forma, substituindo essa interpretação geométrica na expressão obtida em (2), vem:

$$s = cos\theta \Rightarrow s^2 = \theta$$
$$\vec{v} = sen\theta\vec{n}$$

$$q p \underline{q} = (0, s^2\vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r} + 2(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r}) = (0, \theta\,)\vec{r} - (sen\theta\vec{n} \cdot sen\theta\vec{n})\vec{r} + 2(sen\theta\vec{n} \cdot \vec{r})\theta\vec{n} + 2cos\theta\,(sen\theta\vec{n}) \times \vec{r}) =$$
$$(0, \theta\,)\vec{r} - (\theta\vec{n}\, \cdot \vec{n})\vec{r} + (2\theta\,)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (2cos\theta sen\theta)\vec{n} \times \vec{r}) = (0, \theta\,)\vec{r} - (\theta\,)\vec{r} + (1 - cos2\theta)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (sen2\theta)\vec{n} \times \vec{r}) = (0, (\theta\, - \theta\,)\vec{r} + (1 - cos2\theta)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (sen2\theta)\vec{n} \times \vec{r})) =$$
$$(0, (cos2\theta)\vec{r} + (1 - cos2\theta)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + (sen2\theta)\vec{n} \times \vec{r}).$$

Observamos que dado um vetor $\vec{n}$ unitário e um ângulo de rotação θ, o quatérnio $q = (cos\theta, sen\theta\vec{n})$ executa uma rotação de p em torno do eixo $\vec{n}$ de ângulo 2θ.

3.2.3 Rotação Composta com Quatérnios

Multiplicando dois quatérnios unitários de eixos e ângulos diferentes, naturalmente conseguimos representar a composição de suas rotações, ocorrendo a parametrização entre os quatérnios. Então, a rotação composta pode ser realizada da seguinte forma:

$$q_4 = \underline{q_3} \Rightarrow q_3 p q_4 = q_3 p \underline{q}_3 = Rq_3(p)$$

Pois temos que:

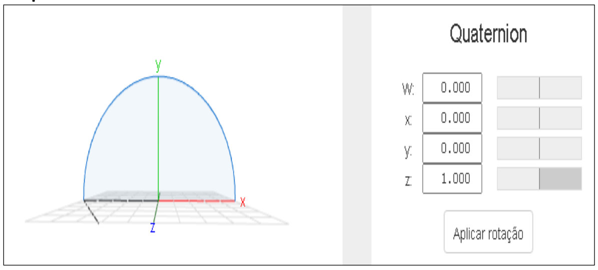
$$q_3 = q_1 q_2 = (s_2, \vec{v}_2)(s_1, \vec{v}_1) = (s_2 s_1 - \vec{v}_2\vec{v}_1, s_2\vec{v}_1 + s_1\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \Leftrightarrow \underline{q}_3 =$$
$$(s_2 s_1 - \vec{v}_2\vec{v}_1, -s_2\vec{v}_1 - s_1\vec{v}_2 - \vec{v}_2 \times \vec{v}_1) =$$
$$(s_2 s_1 - \vec{v}_2\vec{v}_1, -s_2\vec{v}_1 - s_1\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \Leftrightarrow$$
$$\underline{q_3 q_2} = (s_1, -\vec{v}_1)(s_2, -\vec{v}_2) = \underline{q}_3 = q_4 = (s_2 s_1 - \vec{v}_2\vec{v}_1, -s_2\vec{v}_1 - s_1\vec{v}_2 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_1).$$

3.2.4 Aplicando a Rotação Composta Via Quatérnios e, utilizando o Software GeoGebra para Visualização.

A primeira rotação pode ser representada pelo quatérnio:

$$q_1 = \left(cos\frac{180°}{2}, sen\frac{180°}{2}(0,0,1)\right) = (cos90°, sen90°(0,0,1)) = (0, (1)(0,0,1)) = (0, (0,0,1)).$$

Figura 14. Rotação via Quatérnios representado no Software Livre on-line Quaternion - Vista Superior.

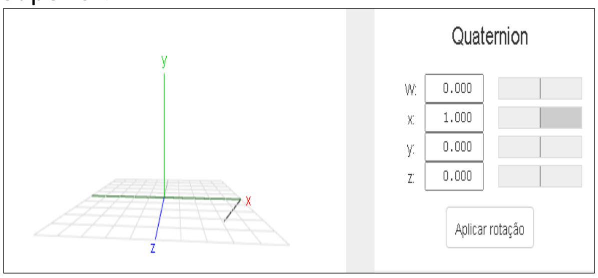


Fonte: Elaborada pelos autores.

A segunda rotação é dada pelo quatérnio:

$$q_2 = \left(cos\frac{180°}{2}, sen\frac{180°}{2}(1,0,0)\right) = (cos90°, sen90°(1,0,0)) = (0, (1)(1,0,0)) = (0, (1,0,0)).$$

Figura 15. Rotação via Quatérnios representado no Software Livre on-line QUATERNION - Vista Superior.



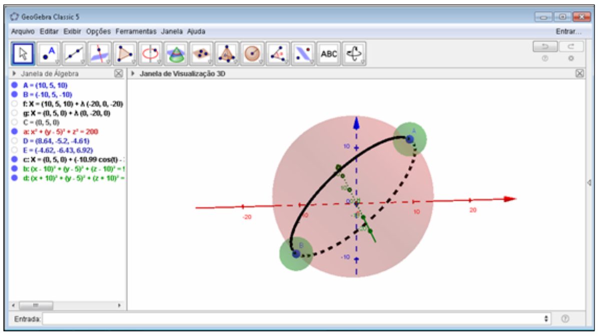
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para saber o comportamento algébrico do corpo rígido em seu instante inicial, após às duas rotações, suponhamos que o ponto inicial ocupe a posição $\vec{v}_1 = (10,5,10)$, ou seja, 10 na direção das abscissas, 5 na direção das ordenadas e 10 na direção das cotas. Aplicando a rotação na posição inicial sobre o ponto $\vec{v}_1 = (10,5,10)$, teremos na posição final $\vec{v}_2 = (-10,5,-10)$, assim multiplicando dois quatérnio podemos encontrar a parametrização em coordenadas, determinando a posição de um corpo rígido no espaço e sua trajetória.

$$q_3(0,\vec{p}_1)\underline{q}_3 =$$
$$\big(0,(0,-1,0)\big),(0,(10,5,10)(0,-(0,-1,0) =$$
$$\big(0,(0,-1,0)\big)(0\cdot 0+$$
$$(0,-1,0)(10,5,10),0(10,5,10)+$$
$$0(-(0,-1,0)+(0,1,0)\times(10,5,10) =$$
$$\big(0,(0,-1,0)\big),(0+(0-5+0),(10,0-10) =$$
$$(0,(0,-1,0)(-5,(10,0,-10) = (-5\cdot 0-$$
$$(10,0,-10)(0,1,0),-5(0,-1,0)+$$
$$0(10,0,-10)+(10,0,-10)\times(0,-1,0) = (0-$$
$$(10\cdot 0+0\cdot 1-10\cdot 0),(0,5,0)+$$
$$(-10,0,-10) = (0,(-10,5,-10)).$$

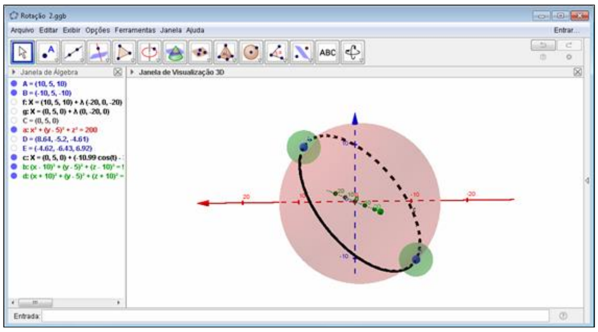
Considerando o ponto $A = \vec{v}_1 = (10,5,10)$ em um corpo rígido qualquer, e utilizando o Software GeoGebra; nas figuras abaixo é possível visualizar a rotação deste mesmo corpo representado pela rotação composta via quatérnios do ponto $A = \vec{v}_1 = (10,5,10)$ contido na esfera. Traçando um arco de círculo máximo até o ponto $B = \vec{v}_2 = (-10,5,-10)$ podemos notar a translação ocorrida do ponto A até o ponto B.

Figura 16. Rotação via Quatérnio representado no Software GeoGebra 3D - Vista Frontal.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 17. Rotação via Quatérnio representado no Software GeoGebra 3D - Vista Superior-Posterior.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Dessa forma, a multiplicação entre Quatérnios facilita a parametrização de objetos em coordenadas de maneira simples, com composição de números arbitrários de rotação, através de quaisquer pontos desse objeto. Então, para representarmos a orientação de um corpo rígido basta tomarmos um Quatérnio.

3.2.5 Uso de Softwares Educativo Livre e on-line

A utilização das novas tecnologias educacionais está cada vez mais presente no âmbito escolar, pois estas (as tecnologias) são vistas como um recurso metodológico alternativo no processo do desenvolvimento de ensino e aprendizagem de matemática por diversos pesquisadores da área. Os softwares educativos estão ganhando espaço dentro da sala de aula, pois os mesmos tem facilitado o ensino e aprendizagem de conteúdo específicos de matemática, bem como melhora a interação entre alunos, professores e alguns conteúdos abstratos como os números imaginários. Neste contexto, segundo Soffa e Alcântara (2008),

> O que diferencia um *software* educativo de outras classes de *softwares* educacionais é o fato de ser desenvolvido com designio de levar o aluno a construir um determinado conhecimento referente a um conteúdo didático. O objetivo de um *software* educativo é a de favorecer os processos de ensino-aprendizagem e sua característica principal é seu caráter didático (SOFFA; ALCÂNTARA, 2008, p. 4925).

Logo, tais softwares educativos não garantem por si só a aprendizagem de conteúdo específicos, haja vista que, estes programas "são instrumentos didáticos de ensino que podem e devem estar a serviço do processo de construção e assimilação do conhecimento dos aprendizes" (SOFFA; ALCÂNTARA, 2008, p. 4925).

Segundo De Azevedo Silva et al. (2018, p. 218), referindo ao uso das tecnologias na perspectiva dos softwares, afirma que: "a metodologia utilizada no desenvolvimento e aplicação, facilitará o alcance do objetivo principal, possibilitando a representação dos números complexos de maneira tecnológica e diferenciada".

Dessa forma, em consonância com os autores acima, segundo Gomes et al. (2002), ao ensinar conteúdos Matemáticos fazendo uso de Softwares afirma que:

> Assim, a aprendizagem matemática através de softwares deve ser baseada em situações-problema que considerem: os processos cognitivos, o raciocínio, as estratégias adotadas durante o processo de resolução, os estágios de desenvolvimento relativos às habilidades envolvidas e caracterização dos diversos problemas e seu nível de complexidade (GOMES et al., 2002, p. 5).

O uso desses Softwares, possibilitará a visualização e a representação algébrica e geométrica das operações dessas classes de números imaginários, podendo propiciar uma melhor percepção da rotação no plano que está relacionada diretamente com os Números Complexos e nas transformações lineares, ou seja, rotações no espaço que está associada aos Quatérnios, operando de forma conjunta a Álgebra e a Geometria. Para Silva (2019, p. 97), "E, em se tratando de *Softwares* Livres, não há necessidade de ficar conectado à *Internet* para acessar e utilizar o *software*, uma vez baixado, o uso é independe da navegação na rede."

Nestas circunstâncias, durante a formação inicial e/ou continuada dos professores de Matemática, é fundamental que haja a familiarização das novas Tecnologias Educacionais. Neste aspecto, as Diretrizes Nacionais de Educação determinam que:

> [...]curso e licenciado devem adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de matemática, em especial para formação e soluções de problemas. É importante também a familiarização do licenciado, ao longo do curso, com outras tecnologias que possa contribuir para o ensino de Matemática (Parecer CNE/CES, 2001, 1302, p. 06).

Em vista disso, há uma necessidade de restruturação no método tradicionalista de ensinar conteúdo usando somente, lápis, giz e quadro dentro da sala de aula, durante a formação inicial dos professores. Neste contexto, segundo Ferreira (2012), "é relevante repensar a formação dos professores de forma ampla, a fim de caminharmos para processos educativos mais integrados, conectados e interativos" (p. 5).

> As novas tecnologias educacionais como proposta pedagógica, exigem uma formação docente bastante ampla. Visto que as ações pedagógicas não envolvem a penas a utilização do computador ou de um *software* específico, mas exige que se trabalhe com técnicas que incentivem a participação dos alunos, a interação entre eles e a produção do conhecimento, ou seja, envolve muito mais do que apreender conhecimentos digitais. (FERREIRA, 2012, p. 10).

Para tanto, o ensino dos Números Complexos e dos Quatérnios à luz das Novas Tecnologias em especial do Software Educativo Livre GeoGebra e o Software Livre on-line

QUATERNION, possibilitam aos alunos uma melhor compreensão algébrica e geométrica desses números imaginários, bem como, melhora a interação entre os agentes do processo (alunos e alunos, professores e alunos). Aprimora o pensamento investigativo, levando o aluno a buscar novas soluções aos problemas propostos.

> Assim, a invenção dos quatérnios propicia uma ruptura entre a álgebra e a aritmética, e estabelece que é possível a concepção de uma teoria algébrica que não leve em conta as propriedades aritméticas, neste caso, a propriedade comutativa da multiplicação. Além disso, para operar no espaço de dimensão três foi preciso empregar uma estrutura de espaço de dimensão quatro. É o surgimento da Álgebra Moderna (SANTOS, 2013, p. 32).

3.2.6 Software Educativo Livre GeoGebra e Software Livre on-line QUATERNION

Criado por Markus Hohenwarter o Software GeoGebra é um programa livre e gratuito com a finalidade de apoiar o contexto escolar dentro da sala de aula. Disponível no site <https://www.geogebra.org/?lan=pt>; esse software, consiste numa dinâmica onde combina conceitos geométricos e algébricos ao passo que o objeto matemático é construído, propiciando de maneira ágil e instantânea a visualização das propriedades e aplicações matemáticas, bem como promove a interação individual e/ou coletiva do aluno coma novas tecnologias educacionais.

O Software QUATERNION é um programa on-line livre e gratuito, no qual, mostra a transformação linear graficamente de objetos de dimensão quatro. Pode ser acessado pelo site < Quaternions - Visualisation>. Esse (o QUATERNION), trabalha com os conceitos da álgebra e geometria em uma única tela, permitindo que o aluno perceba a representação geométrica ao passo que insere os comandos algébricos. Dessa forma, possibilita o conhecimento matemático diferenciado aumentando a criatividade do aluno através de uma linguagem de fácil compreensão, bem como facilita o processo de ensino e aprendizagem dos envolvidos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi realizado, nesta pesquisa, um breve estudo sobre a consolidação da Classe dos Hiper Complexos Quatérnios que são uma generalização do Corpo dos Números Complexos, mostrando a não comutatividade da multiplicação desse conjunto, no qual propicia a ruptura entre a álgebra e a propriedade da aritmética. Além disso, foi utilizado com recurso metodológico alternativo o uso das novas tecnologias educacionais na perspectiva do Software Educativo Livre GeoGebra e do Software on-line Livre QUATERNION. Estes softwares, possibilitaram a visualização e a representação algébrica e geométrica das operações dessas classes de números imaginários.

Foram realizadas operações com os Números Complexos, demostrando a rotação no plano bidimensional, por meio de uma questão exemplar, bem como, foi executado operações com os Quatérnios onde possibilitou realizar transformações no espaço tridimensional operando paralelamente a Álgebra e a Geometria.

Para tanto, nessa pesquisa percebemos que as finalidades no uso das tecnologias como os Softwares são necessariamente recursos metodológicos alternativos para o desenvolvimento no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, porém, tais softwares devem ser devidamente escolhidos e trabalhados apoiando os conteúdos com intensão de aprimorar nos alunos um pensamento matemático criativo, reflexivo, e ainda que seja contextualizado com a realidade do aluno.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao Programa de Educação Tutorial – PET Conexões Saberes de Matemática CPTL/UFMS.

REFERÊNCIAS

DE AZEVEDO SILVA, M. M.; PEREIRA, J. S; DE SOUSA, E. K. V. **Números Complexos: De Gauss às aplicações no GeoGebra.** Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 5, n. 14, p. 213-222, 2018. https://doi.org/10.30938/bocehm.v5i14.233

FERREIRA, T.B. **Novas tecnologias educacionais e mediação pedagógica: uma relação possível na universidade.** In: COLÓQUIO INTERNACIONAL "EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE", 6., 2012, São Cristóvão. Anais eletrônicos [...]. São Cristóvão: EDUCON, 2012. Disponível em: https://ri.ufs.br/jspui/handle/riufs/10177. Acesso em: 24 jun. 2021.

CNE. CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, Diretrizes Curriculares Nacionais de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. *Parecer CNE/CES*, 2001, 1302. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 03 jul. 2021.

GOMES, A. S. et al. **Avaliação de software educativo para o ensino de matemática.** In: WIE WORKSHOP BRASILEIRO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA. 2002. Anais [...]. Florianópolis: SBC. 2002.

GUEDES JUNIOR, R.R.; et al. **Números complexos desenvolvimento e aplicações.** 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2016.

NEVES, R. C. **Aplicações de Números Complexos em Geometria**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Rede Nacional, Instituto Nacional de Matemática Pura, Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, C.A. **Modelagem e tecnologia: alternativas metodológicas para a educação matemática.** 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, PA, 2019.

SANTOS, M, A, dos. **Dos números complexos aos quatérnios: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica aplicação.** 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

SOFFA, M. M.; ALCÂNTARA, P. R. C. **O uso do software educativo: reflexões da prática docente na sala informatizada.** In: Congresso Nacional de Educação (EDUCERE). 15., 2008. Curitiba. Anais [...]. Curitiba : EDUCERE, 2008.