

PROBLEMA DAS LUZES APAGADAS

Light Off Problem

Natalia Rodrigues da Silva¹; Hudson Alves Martins²; Fernando Pereira de Souza³

¹Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Departamento de Ciências Exatas

ntl_rodrigues@outlook.com

²Instituto Federal de Mato Grosso do Sul

Professor EBTT

hudson.martins@ifms.edu.br

³Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Departamento de Ciências Exatas

fermatmel@gmail.com

RESUMO – A Álgebra Linear apresenta um papel muito importante nas áreas de exatas, e através dela podemos mostrar sua utilidade na modelagem de um problema que envolve um simples jogo de apagar e acender luzes, depois de modelado o problema, vamos resolvê-lo implementando um algoritmo de eliminação de Gauss no Scilab (o Scilab é um software livre e de código aberto, voltado para computação numérica semelhante ao Matlab). O jogo, *Lights Out*, é um famoso jogo da década de 90, o qual consiste de 25 teclas iluminadas e arranjadas na forma de uma matriz 5x5, onde se tem um estado inicial e devemos apagar todas as teclas apertando uma sequência correta de teclas, esta sequência será fornecida pelo programa implementado no Scilab, ou seja teremos uma solução imediata para apagarmos todas as luzes do jogo. A modelagem utiliza os conceitos de Álgebra Linear: matrizes, determinantes e sistemas lineares, juntamente com o conceito de conjunto dos restos da divisão por 2 (\mathbb{Z}_2).

Palavras-chave: jogo luzes apagadas; apagar e acender luzes; problemas das luzes.

ABSTRACT – Linear Algebra presents a very important role in the areas of accuracy, and through it we can show its utility in modeling a problem that involves a simple game of erasing and lighting lights, after modeling the problem, we will solve it by implementing an algorithm of elimination of Gauss in Scilab (Scilab is free and open source software, focused on numerical computation similar to Matlab). The game, Lights Out, is a famous game of the 90's, which consists of 25 keys illuminated and arranged in the form of a 5x5 matrix, where it has an initial state and we must delete all keys by pressing a correct sequence of keys, this sequence will be provided by the program implemented in Scilab, ie we will have an immediate solution to erase all lights in the game. The modeling uses Linear Algebra concepts: matrices, determinants and linear systems, together with the concept of the set of the rest of the division by 2 (\mathbb{Z}_2).

Keywords: game lights off; turn lights on and off; light problems.

Recebido em: 15/05/2018
Revisado em: 21/08/2018
Aprovado em: 29/08/2018

1. INTRODUÇÃO

O jogo Lights Out consiste em uma grade de 5x5 de luzes. Ao iniciarmos o jogo, uma configuração é nos dada com um número aleatório ou padrão de luzes. Pressionar qualquer uma das luzes irá alterná-lo e as luzes que estão diretamente à direita, à esquerda, acima e abaixo tem seu estado alterado. Este jogo tem como objetivo desligar todas as luzes, de preferência no menor número possível de pressionamentos de botão. Para isso utilizamos matrizes, sistemas lineares e \mathbb{Z}_2 e o software Scilab. Estas ferramentas nos auxiliam para a obtenção de uma solução rápida para o jogo, assim não haverá a necessidade de termos que apertar as teclas de modo que apagaremos todas as luzes nas “tentativas e erros”, ou seja, tentaremos um método, e observaremos se ele funciona, e se não funcionar tentaremos um novo método, apertaremos uma nova sequência de teclas. No entanto, este não será nosso caso, pois teremos a Álgebra Linear para nos auxiliar e poupar nosso tempo. No jogo teremos luzes acesas e apagadas, e desta forma atribuiremos 1 para as luzes acesas e 0 para as luzes apagadas, com a nossa configuração inicial do jogo, teremos um vetor $b \in \mathbb{Z}_2$ que será a sequência de 0 e 1 de acordo com a disposição das luzes, acesas ou apagadas, e x será o estado obtido quando apertamos uma determinada sequência de teclas, além disso teremos um sistema T que é o nosso estado obtido quando temos todas as nossas luzes apagadas e apertamos todas as teclas uma vez, logo teremos um sistema linear na forma matricial $Ax = T$ com $T \in \mathbb{Z}_2$ e a $A_{25 \times 25}$. Para resolver o problema das luzes apagadas, temos que achar a solução para $Ax = T$, e neste caso utilizaremos o software Scilab onde iremos implementar um programa que consiste em receber o estado inicial do jogo, verificar se tem solução e por fim se tiver, nos fornecerá a solução, ou seja, a sequência de teclas que serão apertadas.

2. METODOLOGIA

No desenvolvimento deste trabalho foram realizados estudos teóricos sobre a resolução de matrizes, e sistemas lineares, juntamente com o conceito de conjunto dos restos da divisão por 2 (\mathbb{Z}_2). Foi trabalhada a parte de escalonamento no conjunto \mathbb{Z}_2 , além de analisarmos alguns exemplos de configurações do jogo e como se dispunham na forma matricial e em um sistema linear. Para uma melhor compreensão do assunto abordado, testamos todo o conteúdo na prática ao jogarmos o Light Out, além disso, foram feitas apresentações de seminários com a presença do orientador.

3. RESULTADOS

3.1. Modelando o Problema das Luzes Apagadas

Começando o jogo com uma determinada configuração, por exemplo:

Figura 1. configuração inicial

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Neste jogo, não há a necessidade de apertarmos as teclas mais que uma vez, pois apertando uma quantidade par de vezes, ela retorna ao seu estado inicial e apertando uma quantidade ímpar de vezes, ela permanece no mesmo estado quando apertamos pela primeira vez. Seja “1” indicando o estado aceso da tecla e “0” o estado apagado da tecla, a configuração inicial do jogo representado acima pode ser indicado pelo vetor $b \in (\mathbb{Z}_2)^{25}$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se a condição do nosso estado inicial é todas as luzes apagadas e formos apertando as teclas aleatoriamente, chegaremos num estado que tem solução, pois se apertamos as mesmas teclas que já foram apertadas, retornaremos ao nosso estado inicial, com todas as luzes apagadas. Este estado é obtido quando apertamos uma determinada seqüência de teclas, e que chamaremos de:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{25})^t$$

Exemplo:

Figura 2. Estado Inicial

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figura 3. Sequência x apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Seja $T = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_{25})^t$ o estado obtido quando temos todas as luzes apagadas e apertamos todas as teclas uma vez:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = x_1 + x_2 + x_6 \\ t_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \\ t_3 = x_2 + x_3 + x_4 + x_8 \\ \vdots \\ t_{12} = x_7 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{17} \\ \vdots \\ t_{24} = x_{19} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \\ t_{25} = x_{20} + x_{24} + x_{25} \end{array} \right.$$

O sistema Linear acima pode ser escrito na forma matricial $Ax = T$ com $T \in (\mathbb{Z}_2)^{25}$ e $A_{25 \times 25}$, com:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{n_1=} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{n_2=} \end{array}$$

O sistema $Ax = b$ só terá solução se, e somente se, se b é ortogonal a \vec{n}_1 e \vec{n}_2 . Se b é ortogonal a \vec{n}_1 e \vec{n}_2 , temos que $b \in \text{col}(A)$. Portanto, $Ax = b$ tem solução.

3.2. A solução

Para obtermos a solução do nosso sistema linear $Ax = b$, primeiramente utilizamos o método de eliminação de Gauss, que consiste em aplicar sucessivas operações elementares à matriz aumentada do sistema, até que ela fique na forma escalonada reduzida, equivalente a matriz original. Este método nos permite verificar se tal sistema tem solução ou não.

Se o sistema tiver solução, utilizaremos o software Scilab que nos possibilita obter a solução imediata, assim para resolver o problema das luzes apagadas, implementamos o seguinte programa no Scilab:

```
1 clear; %Limpando dados do Scilab
2 clc;
3 disp("Resolvido o Problema de Apagar todas
as Luzes ..");
4 disp(" ByHudsonMartins ");
5 I=eye(5,5); %Gerando a Matriz Identidade
5x5
6 B=[1 1 0 0 0;1 1 1 0 0;0 1 1 1 0;0 0 1 1 1;0 0 0 1
1]; %Inserindo a Matriz B
```

```
7 o=zeros(5,5); %Criando Matriz de zeros5x5;
8 A=[B|o|o|o;|B|o|o;|B|o|o|B|;o|o|B|;o|o|o|B];
%Criando a matriz A
9 c=zeros(1,25); %Gerando o Estado inicial
10 for m=1:25;
11 c(m)=input("digite o estado inicial da casa");
12 disp("voce digitou a casa",m)
13 end
14 n1=[0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1
0 0];
15 n2=[1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1
0 0];
16 e1=c*n1'; %verificando se o estado inicial
tem Resultado!!
17 e1=modulo(e1,2);%Utilizando restos por 2
18 e2=c*n2';
19 e2=modulo(e2,2);
20 if e1==1 then
21 disp("Estado inicial sem Resultado!!")
22 elseif e2==1
23 disp("Estado Inicial sem Resultado!!")
24 else
25 Ab=[Ac']; %Resolvendo o Sistema Ax=B
26 for j=1:24;
27 for k=j+1:25 %pivoteamento
28 if Ab(j,j)<Ab(k,j)
29 Aux=Ab(j,:);
30 Ab(j,:)=Ab(k,:);
31 Ab(k,:)=Aux;
32 end
33 end
34 for i=j+1:25;%Transformando a matriz
Aumentada em Uma Matriz Triangular Superior
35 if Ab(i,j)==1 then
36 Ab(i,:)=Ab(i,:)+Ab(j,:);
37 Ab(i,:)=modulo(Ab(i,:),2);
38 end
39 end
40 end
41 for l=25:-1:2; %Escrevendo Matriz na forma
escadareduzida.
42 for n=l-1:-1:1
43 if Ab(n,l)==1 then
44 end
45 end
46 for l=25:-1:2; //Escrevendo Matriz na forma
escada reduzida.
48 for n=l-1:-1:1
49 if Ab(n,l)==1 then
50 Ab(n,:)=Ab(n,:)+Ab(l,:);
51 Ab(n,:)=modulo(Ab(n,:),2);
52 end
53 end
54 end
```

```

55 s=Ab(:,26);
56 disp("A Solução é :");
so=[s(1) s(2) s(3) s(4) s(5); s(6) s(7) s(8) s(9) s(10);
s(11) s(12) s(13) s(14) s(15); s(16) s(17) s(17) s(19)
s(20); s(21) s(22) s(23) s(24) s(25)] //Colocando a
Solução na forma 5x5
57 end

```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vejamos o que acontece quando seguimos essa sequencia:

Tabela 1. Interpretação das linhas do Scilab

Linhas	Descrição das linhas do programa
1 e 2	Limpa as variáveis do Scilab
3 e 4	Cabeçalho do programa
5 à 8	Criando a Matriz A
9 à 13	Gerando o estado inicial
14 e 15	Gerando bases do espaço nulo
16 à 19	Analisando se o estado inicial tem solução
20 à 23	Para!! o programa se a condição inicial não for satisfeita
24 à 39	Resolve o sistema linear com pivoteamento
41 à 48	Transforma a matriz aumentada numa matriz na forma escada reduzida
49 e 50	Escreve o resultado
51	Finaliza o programa

O programa funciona da seguinte forma, ele recebe o estado inicial do jogo, em seguida verifica se tem solução, e se o estado inicial tiver solução, logo ele nos fornece as teclas que devem ser apertadas para apagarmos todas as luzes, e assim atingiremos o nosso objetivo no jogo.

Exemplo: Seja o estado inicial do jogo

Figura 4. Configuração Inicial

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Utilizando o programa encontramos a seguinte solução:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 1 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 2 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 3 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 6 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 8 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 10 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 14 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 15 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 16 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 18 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 19 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 21 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 22 apertada

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Tecla 23 apertada

De fato, conseguimos apagar todas as luzes, lembrando que podemos apertar as teclas em qualquer ordem que mesmo assim iremos apagar todas as luzes.

4. DISCUSSÃO

Este trabalho apresenta o jogo Lights out e seu problema em termos que apagar todas as luzes de forma que apertamos um número menor possível de teclas. Diante disso, através do estudo deste jogo, e toda a sua parte teórica, encontramos uma maneira em que temos um resultado rápido e prático de acharmos a solução do problema, assim seguindo a sequência de teclas dada, conseguimos chegar ao nosso objetivo. Neste caso, não foi trabalhado superficialmente a parte teórica do jogo, buscamos entender todo o conceito básico de matriz, até chegarmos ao conteúdo necessário para trabalharmos o problema.

5. CONCLUSÃO

Para estudantes do ensino médio é de extrema importância que o conceito matemático seja construído junto com ele raciocinando juntos, lembrando conceitos anteriores e descobrindo novos, para que assim ele consiga fazer conexões entre os assuntos e com certeza

absorve muito mais conhecimento e prática matemática. E essa prática será bem mais prazerosa e satisfatória se esses estudantes utilizarem tecnologia para chegar ao resultado desejado, utilizamos um software tão quase poderoso quanto MATLAB, MATHEMATICA, entre outros do gênero numérico, mas com a seguinte vantagem, de ser um software livre, então temos uma excelente ferramenta de auxílio no ensino de matrizes, geometria analítica, gráficos em geral. Assim como existem outras ferramentas tecnológicas para auxiliar no desenvolvimento de outros conteúdos.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

COELHO, F.; LOURENÇO, M.L. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.

GONÇALVES, M.I.C. **Apagando as luzes usando álgebra linear**. Universidade Federal de Santa Catarina, ano.

GADELHA FILHO, D. **Apostila do Scilab**. Disponível em:

<http://euler.mat.ufrgs.br/giacomo/Manuaissoftw/SCILAB/Apostila%20de%20Scilab%20-%20atualizada.pdf>. Acesso em: 11 out. 2014.

RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1998.