colloquium exactarum

TEOREMA DE BROUWER E SUA EQUIVALÊNCIA, NO CASO N= 1, AO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

BROUWER THEOREM AND ITS EQUIVALENCE, IN THE CASE N = 1, TO THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM

Vanessa de Freitas Travello1, Fernando Pereira de Souza[2].

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS Grupo PET MATEMÁTICA – Matemática CPTL/UFMS, Três Lagoas, MS.
E-mail: vanessatravello@gmail.com

RESUMO - O Teorema do Ponto fixo ocupa lugar de destaque em sua história, sendo objeto de estudo. O tema foi inserido como parte de um projeto de iniciação cientifica desenvolvida pela autora como uma das atividades do grupo PET/Matemática da UFMS/Campus de Três Lagoas. O desenvolvimento do projeto foi realizado através de levantamento bibliográfico, estudo teórico do assunto, discussões e apresentações de seminários com a orientação do Professor Doutor Fernando Pereira de Souza e elaboração do relatório final. Este trabalho faz-se uma breve exposição sobre o teorema do ponto fixo de Brouwer, demonstrando-o para dimensão 1 utilizando a equivalência ao teorema do valor intermediário. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer garante a existência de, pelo menos, um ponto fixo para funções contínuas definidas na bola unitária fechada do espaço euclidiano n-dimensional e neste trbalho demonstraremos para o caso unidimensional.
Palavras-chave: Ponto Fixo; Funções Contínuas; Espaço Euclidiano; Topologia.

ABSTRACT - Fixed Point Theorem occupies a prominent place in its history, being the object of study . The theme was inserted as part of a research project developed by the author as one of the activities of the PET/Mathematics group UFMS/Três Lagoas' Campus. The project 's development was carried out by literature survey , study subject's theory , discussions and seminar presentations with the guidance of Dr. Fernando Pereira de Souza and preparing the final report . This work is a brief presentation on the Brouwer's Fixed Point Theorem, proving it to dimension 1, using equivalence to the intermediate value theorem. The Brouwer 's Fixed Point Theorem, which guarantees the existence of at least one fixed point for continuous functions defined in the closed unit ball of n- dimensional Euclidean space and in this work we will prove to the one-dimensional case.
Keywords: Fixed Points; Continuous Functions; Euclidean Space; Topology.

Recebido em: 19/08/2016
Revisado em: 20/08/2016
Aprovado em: 22/08/2016

1. INTRODUÇÃO

Em matemática, sobretudo na análise funcional, o teorema do ponto fixo de Brouwer é um resultado sobre a existência de pontos fixos, muito utilizado na resolução de equações diferenciais. Recebe o nome do matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer. O teorema de Brouwer é muito útil para compreensão da topologia dos espaços euclidianos. Mas o que é um ponto fixo? Um ponto fixo é um ponto que não é alterado por uma aplicação, assim, o ponto fixo depende da aplicação escolhida.

Por vezes estamos interessados em obter as soluções de uma equação

$$f(x) = c,$$

sendo f uma aplicação contínua, definida num intervalo fechado $[a, b]$ com valores em $\mathbb{R}$. Se escrevermos

$$F(x) = f(x) + x - c,$$

vemos que F é contínua, e resolver f equivale a encontra um x tal que

$$F(x) = x,$$

onde x chama-se ponto fixo da aplicação F.

Muitas vezes é difícil saber se uma aplicação f tem ou não pontos fixos e se tiver se são únicos ou não. Por outro lado existem teoremas que garantem a existência e, por vezes, a unicidade de soluções, tais teoremas são chamados teoremas do ponto fixo.

Os teoremas do ponto fixo são usados em outras áreas de ciência, como por exemplo, em economia, teoria de jogos, informática.

A teoria dos pontos fixos diz respeito à Topologia, ramo da matemática criada nos finais do séc. XIX que usa noções como, por exemplo, continuidade, compacidade.

Nesse trabalho iremos enunciar e demonstrar o teorema de Brouwer. Optamos por fazer a sua demonstração para a dimensão 1 e mostrar a sua equivalência ao teorema do valor intermediário, porque pela sua simplicidade poderá ser estudado pelos alunos do ensino médio por exemplo num projeto de iniciação cientifica.

Nosso trabalho é tornar compreensível uma das provas apresentadas para este teorema e motivar sua aplicação. Procuramos apresentar de maneira mais detalhada o teorema demonstrado e estaremos dando continuidade a este trabalho, buscando aplicações diretas e significativas para este teorema.

2. METODOLOGIA

O trabalho é resultado de uma pesquisa teórica, desenvolvido através de discussões do tema com o orientador e apresentações de seminários como parte das atividades do programa PET - Matemática no estudo de Introdução à Topologia.

O trabalho incluiu uma etapa de leitura e resoluções de exercícios, desenvolvimento das atividades propostas e um relatório dissertativo dos resultados obtidos. O estudo e as atividades desenvolvidas foram avaliados através da apresentação de seminários de discussões.

3. RESULTADOS

Em matemática, define se ponto fixo de uma função, como sendo um ponto do domínio desta função que não se altera pela sua aplicação, isto é, $x \in A$ é dito ponto fixo de uma função $f: A \rightarrow A$ se $f(x) = x$. Existem diversos teoremas que garantem a existência de pelo menos um ponto fixo para funções que satisfazem determinadas condições. Sendo o teorema proposto por Brouwer é considerado de maior impacto. Vejamos algumas definições e resultados preliminares de análise real que será necessário para demonstrarmos o teorema em questão.

Definição 1: (Bola unitária fechada) Para cada $n \geq 1$. Denotaremos por B^n, a bola unitária fechada definida por:

$$B^n \coloneqq \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\},$$

Onde a norma de x é dada por,

$$\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}.$$

No caso unidimensional temos que $B^1 = [-1,1]$. A fronteira será denotada por ∂B^n e definida por

$$\partial B^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

Que também é conhecida como esfera unitária, e denotada por S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$. O interior de B^n é definido por

$$\mathrm{int}(B^n) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}.$$

Teorema 1: (Teorema de Weierstrass) Se f é uma função contínua definida sobre um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f assume o seu valor máximo M e também o seu valor mínimo m, no intervalo $[a, b]$. Isto é o mesmo que garantir a existência de valores x_1 e x_2 em $[a, b]$ tal que para todo x em $[a, b]$:

$$f(x_1) = m \leq f(x) \leq M = f(x_2).$$

Dem: Ver [3] pag. 239.

O teorema de Brouwer em dimensão n admite uma quantidade de formulações equivalentes e pode ser demonstrado por técnicas muito diversificadas. É pode ser enunciado:

Teorema 2: (Teorema de Brouwer) Toda aplicação contínua $f: B^n \rightarrow B^n$, tem pelo menos um ponto fixo em B^n.

Faremos a prova para o caso unidimensional e mostraremos que o teorema de Brower implica no seguinte teorema de análise real:

Teorema 3: (Teorema do valor intermediário) Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Qualquer que seja o valor d com

$$f(a) < d < f(b),$$

existe pelo menos um valor x_0 compreendido entre a e b tal que $f(x_0) = d$.

Demonstração do teorema de Brower para $\mathbf{n = 1}$: Seja $f: [-1,1] \to [-1,1]$ uma função contínua. Considere a função $F: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = f(x) - x$. Temos que:

$F(-1) = f(-1) + 1 \geq 0$ e $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

Então pelo teorema do valor intermediário sabemos que existe $x_0 \in (-1,1)$ tal que $F(x_0) = 0$. Portanto

$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$,

ou seja x_0 é ponto fixo de f.

Este resultado pode ser aplicado a qualquer intervalo fechado $I = [a, b]$. De fato, seja $f: [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Considere a função $g: [-1,1] \to [-1,1]$ definida por

$$g(x) = \frac{2}{b-a}\left[f\left(\frac{b+a+x(b-a)}{2}\right) - \frac{b+a}{2}\right].$$

Desta forma, $g: [-1,1] \to [-1,1]$ e é contínua. Portanto possui ponto fixo, ou seja, existe $x_0 \in (-1,1)$ tal que $g(x_0) = x_0$, assim

$$a \leq \frac{b+a+x_0(b-a)}{2} \leq b$$

e,

$$f\left(\frac{b+a+x_0(b-a)}{2}\right) = \frac{b+a+x_0(b-a)}{2},$$

mostrando que f possui ponto fixo. Podemos ver este resultado geometricamente como mostra a figura 1:

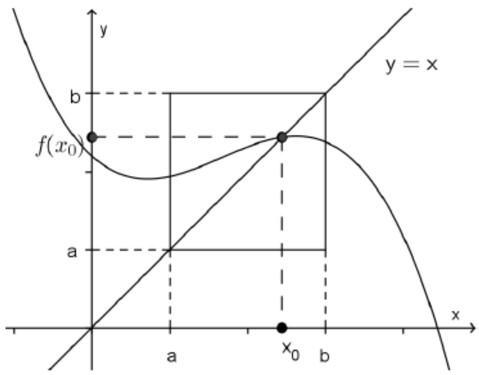


Figura 1. ponto fixo no intervalo

Na demonstração anterior ficou claro que o teorema do valor intermediário implica o teorema de Brouwer para $n = 1$. Vamos apresentar agora a implicação contrária, para então podermos concluir que o teorema do valor intermédio equivale ao teorema de Brouwer no caso $n = 1$.

Demonstração do Teorema do Valor Intermediário. Primeiro analisaremos o caso particular em que $c = 0$, e consequentemente

$f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

A ideia da demonstração é construir uma nova função contínua $\varphi: [a, b] \to [a, b]$ definida por $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$. Esta escolha garante pelo teorema de Brouwer que $\varphi(x)$ tem pelo menos um ponto fixo x_0 no intervalo $[a, b]$. Ter-se-á então

$$\varphi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) = 0.$$

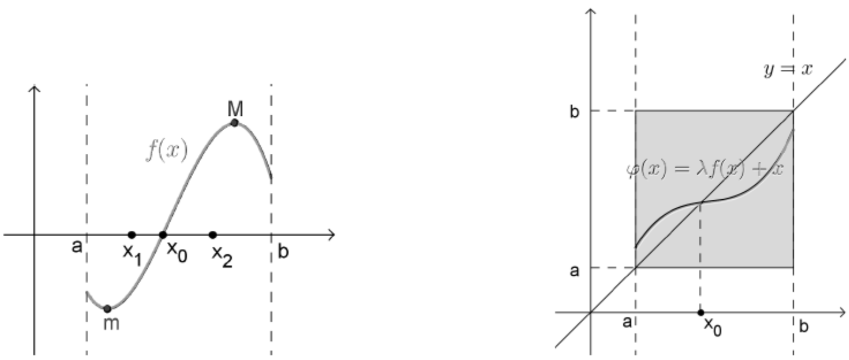
Para $c \neq 0$, basta seguirmos o mesmo raciocínio utilizando a função

$$\varphi_c = \lambda[f(x) - c] + x.$$

Como podemos escolher o valor de λ. Pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 1), sabemos que a função f é limitada e tem um máximo e um mínimo, ou seja, existem m e M tais que

$$m \leq f(x) \leq M,$$

para qualquer $x \in [a, b]$, ver figura 2 a . Neste caso temos em particular $m < 0$ e $M > 0$.



(a) Função f contínua em $[a, b]$ (b) Função contínua φ: $[a, b] \rightarrow [a, b]$

Figura 2. Teorema de Brouwer $n = 1 \Longrightarrow$ Teorema Valor Intermédio.

Como f é contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, podemos escolher um x_1 tal que $f(x) < 0$; $\forall\, x \in [a, x_1]$, escolhemos também x_2, tal que $f(x) > 0$; $\forall\, x \in [x_2, b]$.

Seja

$$\lambda = max\left\{\frac{a-x_1}{M}, \frac{b-x_2}{m}\right\}, \qquad (1)$$

λ será igual a um dos dois valores negativos $\frac{a-x_1}{M}$ ou $\frac{b-x_2}{m}$.

Vejamos agora que para o λ escolhido em (1) vamos ter $\phi(x) \geq a$ para $x \in [a, b]$. Comecemos por considerar os valores de $x \in [a, b]$ tais que $f(x) \geq 0$. Como $\lambda f(x) \geq \frac{a-x_1}{M} f(x)$ e usando a desigualdade $-f(x) \geq -M$, ficamos com:

$$\phi(x) = \lambda f(x) + x \geq \frac{a - x_1}{M} f(x) + x$$
$$= \frac{a - x_1}{M}\big(-f(x)\big) + x$$
$$\geq \frac{a - x_1}{M}(-M) + x$$
$$= a - x_1 + x.$$

Isto implica que: $\phi(x) \geq a - x_1 + x \geq a$, ou seja,

$$\phi(x) \geq a, \forall\, x \in [a, b] \text{ tal que } f(x) \geq 0. \qquad (2)$$

Para x tal que $f(x) < 0$ temos $\lambda f(x) > 0$ e $\varphi(x) = \lambda f(x) + x \geq x \geq a$, ou seja

$$\varphi(x) \geq a. \qquad (3)$$

De (2) e (3), concluímos que $\forall\, x \in [a,b], \varphi(x) \geq a$. Vejamos agora que $\varphi(x) \leq b, \forall\, x \in [a,b]$. Seja $x \in [a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$. Então

$\lambda f(x) \leq 0 \Longrightarrow \varphi(x) = \lambda f(x) + x \leq x \Leftrightarrow \varphi(x) \leq b.$
(4)

Seja $x \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq 0$. Como $\lambda \geq \frac{b-x_2}{m}$ multiplicando ambos os membros da desigualdade por $f(x)$ temos: $\lambda f(x) \geq \frac{b-x_2}{m} f(x)$ e aplicando o mesmo artificio semelhante ao que usamos anteriormente, temos então:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \lambda f(x) + x &\leq \frac{b-x_2}{m} f(x) + x \\ &= \frac{b-x_2}{m}\big(-f(x)\big) + x \\ &\leq \frac{b-x_2}{m}(-m) + x \\ &= b - x_2 + x.\end{aligned}$$

Isto implica que $\varphi(x) \leq b - x_2 + x \leq b$, ou seja,

$\varphi(x) \leq b, \forall\, x \in [a,b]$, tal que $f(x) \leq 0$
(5)

De (4) e (5), concluímos que $\forall\, x \in [a,b], \varphi(x) \leq b$.

Assim podemos concluir que para $n = 1$ o teorema de Brouwer é equivalente ao teorema do valor intermédio.

4. DISCUSSÃO

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é talvez o teorema de maior relevância a respeito da existência de um ponto fixo. E, apesar de ter recebido críticas do próprio Brouwer quanto à construção da sua demonstração, com base no terceiro excluído (por absurdo), possui utilidade e aplicação em áreas diversas dentro da matemática e além dela, produzindo e ampliando conhecimentos.

Neste Projeto Final, apresentamos e detalhamos a prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, demonstrando-o para dimensão 1 utilizando a equivalência ao teorema do valor intermédio. Visto que pelo a sua simplicidade possa ser aplicado para alunos do ensino médio como um trabalho e iniciação cientifica.

5. CONCLUSÃO

O trabalho propiciou contato com algumas das técnicas comumente utilizadas em problemas introdutórios da topologia dos espaços euclidianos. É também o ponto de partida para a demonstração de outros teoremas do o teorema do ponto fixo de Schauder e o teorema do ponto fixo de Schaefer.

REFERÊNCIAS

CAISSOTTI, T. **Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações**. 2012. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Lisboa, 2012.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. v.1.

LIMA, E. L. **Análise real**. Funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v.1

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1.