colloquium exactarum

COMPORTAMENTO DE SOLUÇÕES

BEHAVIOR OF SOLUCTIONS

Rafael Lima Oliveira; Fernando Pereira de Souza

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, CPTL/UFMS. e-mail: fermatmel@gmail.com.br

RESUMO - No presente trabalho é estudado os tipos de soluções das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes da forma $ay'' + by' + cy = 0$, com a, b e c constantes reais e realizado um estudo sobre o comportamento da solução $y(t)$ desta equação diferencial quando $t \to +\infty$.
Palavras-chave: equações diferenciais; soluções exponenciais; comportamento de soluções.

ABSTRACT - In this paper we studied the types of solutions of ordinary differential equations of second order with constant coefficients of the form $ay'' + by' + cy = 0$, with a, b e c real constants and conducted a study on the behavior of the solution $y(t)$ of this differential equation when $t \to +\infty$.
Keywords: differential equations; exponential solutions; behavior of solutions.

Recebido em: 19/08/2014
Revisado em: 01/09/2014
Aprovado em: 16/09/2014

1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho é feito uma abordagem sobre alguns tópicos da teoria de Equações Diferenciais. Para acompanhar seu desenvolvimento é necessário, como pré-requisito, conceitos fundamentais de derivadas.

Uma equação diferencial é uma relação que envolve uma "função incógnita" e suas derivadas. Com uma vasta teoria, as equações diferenciais possuem vários campos de aplicações como física, química, biologia, engenharias dentre outras.

Um tipo particular dessas equações diferenciais é o caso das equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes, donde, possuem aplicações em situações de modelagem com problemas envolvendo física e movimento amortecido.

Nosso objetivo é encontrar um padrão entre as soluções das equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes de modo a observar o comportamento das soluções quando $t \rightarrow +\infty$ (considerando uma função $y(t)$, onde $t =$ tempo), tendo assim, informações sobre o que esperar acontecer com o experimento que foi modelado por uma equação desta forma.

2 PRELIMINARES

Definimos uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes como $ay'' + by' + cy = 0$, onde a, b, c são constantes reais dadas.

Conforme BOYCE e DIPRIMA (2012), para encontrar as soluções destas equações, vamos supor soluções exponenciais da forma $y(t) = e^{rt}$, onde r é um número a ser determinado. Sendo assim, segue que $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2e^{rt}$. Substituindo essas expressões na equação diferencial em questão, obtêm-se $ar^2 + br + c = 0$. Desta maneira, associamos uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes com uma equação do segundo grau que à chamaremos de equação característica associada a equação diferencial. O significado da mesma está no fato que, se r é solução da equação característica então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial. Sendo assim, temos que analisar três casos para a equação característica, isto é, como a equação característica é uma equação do segundo grau com coeficientes reais, possui duas raízes reais distintas, duas reais iguais, ou duas complexas conjugadas.

Primeiro caso: Raízes reais distintas da equação característica: Vamos supor que as raízes da equação característica são distintas e denotá-las por r_1 e r_2. Logo $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_1(t) = e^{r_2 t}$ são duas soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, ou ainda, a combinação linear das soluções $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Podíamos verificar se a solução obtida $y(t)$ é realmente solução da equação diferencial em questão, para isso, devemos observar que a equação em questão é $ay'' + by' + cy = 0\ (*)$, logo, como $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, temos $y'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$ e $y''^{(t)} = c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}$. Substituindo na equação (*) as expressões para $y(t), y'(t)$ e $y''(t)$ temos,

$a(c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}) + b(c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}) + c(c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}) = 0.$

A conclusão segue-se colocando em evidência alguns termos específicos da relação acima e observando que r_1 e r_2 são raízes da equação característica.

Podemos exemplificar o que foi realizado acima com o seguinte exemplo: Resolver a equação diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

que cumpre as condições iniciais $y(0) = 5$ e $y'(0) = -7$. Para isso, deve-se observar que a equação característica associada a equação diferencial é dada por $r^2 + 3r + 2 = 0$. Depois de resolver a equação característica encontra-se as raízes $r_1 = -1$ e $r_2 = -2$. Desta maneira, usando o que foi desenvolvido até aqui, pode-se concluir que a solução da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

De acordo com as condições iniciais e do fato que $y'(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$, temos que

$$y(0) = c_1 + c_2 = 5,$$

$$y'^{(0)} = -c_1 - 2c_2 = -7,$$

no que implica $c_1 = 3$ e $c_2 = 2$. Portanto a solução da equação diferencial com condições iniciam é dada por $y(t) = 3e^{-t} + 2e^{-2t}$. De outro modo, pode-se ainda obervar o comportamento do gráfico da solução pela figura1 abaixo:

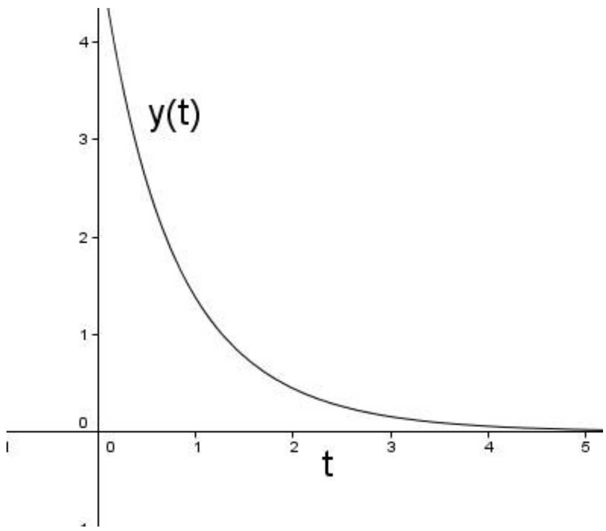

Figura1. Solução da equação $y'' + 3y' + 2y = 0$

Segundo caso: Raízes complexas conjugadas da equação característica: Do caso anterior, tínhamos $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$. Agora, suponhamos que ao resolver a equação característica associada a equação diferencial tenha-se o discriminante $b^2 - 4ac < 0$, sendo assim, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$ onde λ e μ são números reais. Logo, as expressões correspondentes são $y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t}$ e $y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t}$. Nossa intenção neste momento, é entender as expressões y_1 e y_2. Para simplificar, usamos a fórmula $e^{i\mu} = \cos(\mu t) + isen(\mu t)$, sendo assim,

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t}$$
$$= e^{\lambda t}\big(\cos(\mu t) + isen(\mu t)\big)$$
$$= e^{\lambda t}\cos(\mu t) + ie^{\lambda t}sen(\mu t)$$
$$y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t}\big(\cos(\mu t) - isen(\mu t)\big)$$
$$= e^{\lambda t}\cos(\mu t) - ie^{\lambda t}sen(\mu t)$$

Considerando que a soma e diferença também são soluções, temos $y_1(t) + y_2(t) = 2e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ e $y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{\lambda t}sen(\mu t)$. Logo, colocando em termos de constantes os números 2 e $2i$, segue que a solução geral é $y(t) = c_1e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2e^{\lambda t}sen(\mu t)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Para verificar se a expressão obtida é realmente solução da equação diferencial, basta substituir conforme feito no primeiro caso.

Um exemplo para este caso pode ser visto com a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 6y = 0,$$

cuja equação característica associada é dada por $r^2 + 2r + 6 = 0$ no qual as raízes são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}i$. Desta maneira, a solução da equação diferencial é dada por:

$$y(t) = c_1e^{-t}cos\big(\sqrt{5t}\big) + c_2e^{-t}sen\big(\sqrt{5t}\big).$$

O gráfico da solução é dado pela figura 2 a seguir:

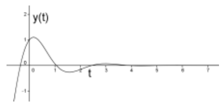

Figura2. Solução da equação $y'' + 2y' + 6y = 0$

Terceiro Caso: Raízes repetidas da equação característica: Este caso trata de quando as raízes $r_1 = r_2$, isto é, o discriminante $b^2 - 4ac$ da equação característica é igual a zero. Logo, vamos ter $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$ e assim uma solução é $y_1(t) = e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$. Vamos buscar uma segunda solução supondo $y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$, logo teremos:

$$y'(t) = v'(t)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} - \frac{b}{2a}v(t)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t},$$
$$y''(t) = v''^{(t)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$$
$$+ \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}.$$

Substituindo na equação diferencial em questão as expressões precedentes (y', y'') e realizando simplificações necessárias, encontra-se $v(t) = c_1t + c_2$, desta maneira, a solução segue como $y(t) = (c_1t + c_2)e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$.

Um exemplo sobre essa situação pode ser visto como: Resolver a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Para isso, deve-se observar que a equação característica associada a equação diferencial é dada por $r^2+4r+4=0$. Depois de resolver a equação característica encontram-se as raízes $r_1=r_2=-2$. Desta maneira, usando o que foi desenvolvido até aqui, pode-se concluir que a solução da equação diferencial é

$$y(t)=c_1te^{-2t}+c_2e^{-2t}.$$

De outro modo, pode-se ainda observar o comportamento do gráfico da solução pela figura3 a seguir, onde vamos supor constantes $c_1=c_2=1$.

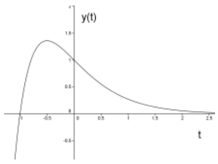

Figura3. Solução da equação $y''+4y'+4y=0$.

3 RESULTADOS PRINCIPAIS: COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES SEGUNDO AS RAÍZES OBTIDAS

O principal interesse agora é estudar o comportamento das soluções da equação diferencial $ay''+by'+cy=0$ onde vamos supor a,b e c constantes positivas e diferentes de zero. Para este estudo é necessário analisar três casos, como já havíamos considerado anteriormente, isto é, quando as raízes da equação característica são reais distintas, complexas conjugadas ou reais repetidas.

Raízes reais distintas: As raízes reais distintas da equação característica são dadas por $r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e assim as soluções da equação diferencial com coeficientes constantes são dadas pela função $y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$.

De acordo com as hipóteses sobre as constantes a,b e c reais, temos

$$b>0\Rightarrow b^2>0\Rightarrow b^2>b^2-4ac>0$$

$$\Rightarrow b>\sqrt{b^2-4ac}\Rightarrow -b+\sqrt{b^2-4ac}<0,$$

além disso, tem-se que

$$-b-\sqrt{b^2-4ac}<0.$$

Desta maneira,

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to+\infty}c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}c_1e^{r_1t}+\lim_{t\to+\infty}c_2e^{r_2t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}c_1e^{\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)t}$$

$$+\lim_{t\to+\infty}c_2e^{\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)t}$$

$$=0+0=0.$$

O que acabamos de mostrar foi que a solução de uma equação diferencial homogênea com coeficientes constantes cujas raízes da equação característica são reais distintas tende a 0 quanto $t\to+\infty$. Graficamente ocorre o que pode-se ver no exemplo abaixo cuja equação diferencial é dada por exemplo por $y''(t)+10y(t)+$

$21y(t) = 0$, cuja equação característica é $r^2 + 10r + 21 = 0$ que implica solução $r_1 = -7$ e $r_2 = -3$ de modo que a solução é dada por $y(t) = c_1 e^{-7t} + c_2 e^{-3t}$ cujo o gráfico, condiz com o que foi mostrado acima. Observe figura 4.

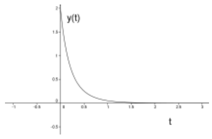

Figura 4. Solução da equação $y''(t) + 10y(t) + 21y(t) = 0$

Raízes complexas conjugadas: Neste caso a solução de $ay'' + by' + cy = 0$ onde o discriminante da equação característica é $b^2 - 4ac < 0$, é dada por $y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} sen(\mu t)$. Como quer-se saber o comportamento das soluções quando $t \to +\infty$, fazemos:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \left(c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} sen(\mu t)\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + \lim_{t\to+\infty} c_2 e^{\lambda t} sen(\mu t).$$

Do fato que $\lambda = \frac{-b}{2a}$ e $\mu = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ segue que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + \lim_{t\to+\infty} c_2 e^{\lambda t} sen(\mu t)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} \cos\left(\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)t\right) + \lim_{t\to+\infty} c_2 e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} sen\left(\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)t\right) = 0,$$

pois, tendo em vista que o cosseno é limitado e $\lim_{t\to+\infty} e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} = 0$ segue que o produto também tende a zero por LIMA (2013).

Exemplificando, vamos considerar a equação diferencial $y'' + 2y' + 4y = 0$. Segue que a equação característica associada é dada por $r^2 + 2r + 4 = 0$, cujas raízes são $r = \pm\sqrt{3}i$. Logo, conforme vimos neste texto, a solução da equação diferencial para este tipo de raiz da equação característica é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-t} cos\left(\sqrt{3t}\right) + c_2 e^{-t} sen\left(\sqrt{3t}\right).$$

Observando o gráfico da solução a seguir na figura 5, vemos realmente que conforme t é maior a solução $y(t)$ tende a 0.

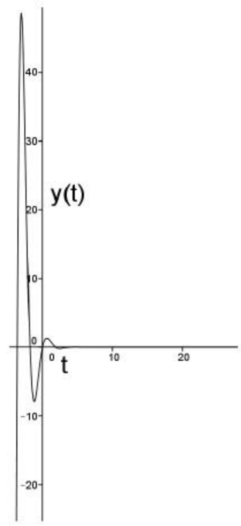

Figura 5. Solução da equação $y'' + 2y' + 4y = 0$.

Raízes reais repetidas: Tem-se que a solução geral da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ com o discriminante da equação característica $b^2 - 4ac$ é dada por $y(t) = c_1 t e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$, logo o comportamento da solução é dado por $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} c_1 t e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} = \lim_{t\to+\infty} c_1 t e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t} + \lim_{t\to+\infty} c_2 e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$

$$= \lim_{t\to+\infty} c_1 t \frac{1}{e^{\left(\frac{b}{2a}\right)t}} + 0 = 0$$

Vamos considerar a equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$. Para tal equação encontramos a equação característica associada $r^2 + 2r + 1 = 0$ cujas raízes são $r_1 = r_2 = -1$. Desta forma, montamos a solução da equação diferencial, que é dada por

$$y(t) = c_1 t e^{-t} + c_1 t e^{-t},$$

cujo o gráfico é dado pela figura 6 a seguir, onde tomemos $c_1 = c_2 = 1$:

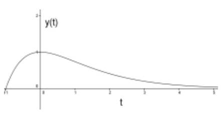

Figura6. Solução da equação $y'' + 2y' + y = 0$.

Repare que como mostrado acima, a solução tende a 0 conforme o valor de t é maior.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vamos supor uma situação de movimento amortecido chamado de problema carro-mola conforme BIANCHINI (2014) no qual vamos usar os resultados anteriores para interpretar e dar significado a essa situação problema.

Considere um carro de massa m preso a uma parece por uma mola e imerso em um fluído. Coloca-se o carro em movimento puxando-o x_0 metros de sua posição de equilíbrio e soltando-o. Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força F_m sobre o carro proporcional à sua distenção, com coeficiente de proporcionalidade k. Vamos supor que o meio viscoso oferece uma força F_v de resistência ao movimento proporcional à sua velocidade com constante de proporcionalidade c. Seja $x = x(t)$ a posição do carro em um instante t e $v = v(t)$ sua velocidade. Uma vez iniciado o movimento, as forças atuantes no carro, isto é F_m e F_v, tem sinais contrários. Coloquemos um referencial conforme a figura 7 a seguir:

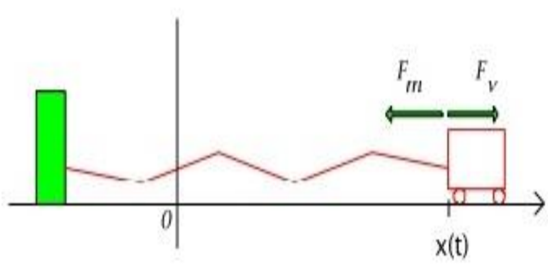

Figura7. Situação de movimento amortecido

Vamos supor que por um instante, o carro está à direita do ponto de equilíbrio.

Neste caso, a força F_m assume o sinal negativo e a força F_v o sinal positivo. Acontece que, como o carro está se movimentando para a esquerda, a distância $x(t)$ da posição de equilíbrio está diminuindo, isto é, $x(t)$ está decrescendo e, portanto, sua derivada $x'(t)$ é uma função negativa, ou seja, sua velocidade é negativa. Como F_v é positiva, então $F_v = -cx'(t)$. Logo, pela $2a$ lei de Newton, a soma das forças atuantes no sistema carro-mola, nos dá a equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0.$$

Vamos resolver o problema considerando $m = 1, c = 3$ e $k = 2$. Sendo assim, basta usar que a equação característica é $r^2 + 3r + 2 = 0$ e sendo assim, as raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = -2$. Logo, a solução geral é dada por $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Neste momento, podemos interpretar o nosso resultado anterior visto que, como a equação considerada é de segunda ordem com coeficientes constantes positivos, pelo resultado anterior a solução $x(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$, ou seja, o carro tende para sua posição de equilíbrio.

Com base nos resultados apresentados, isto é, o desenvolvimento dos três tipos de expressões para as soluções da equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, foi possível obter-se o comportamento das soluções quando a variável independente t tende ao infinito, isto é, quanto um possível experimento é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes é possível usar este resultado de modo a contribuir com relação ao o que se esperar do experimento em longo prazo.

5 AGRADECIMENTOS

Ao estimado orientador, Professor doutor Fernando Pereira de Souza, pelo incansável apoio em todo o desenvolvimento do trabalho.

6 REFERÊNCIAS

BIANCHINI, W. Equações Diferenciais Ordinária de segunda ordem. Disponível em <www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/capitulo2.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2014.

BOYCE, W.F.; DIPRIMA, R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

LIMA, E.L. **Análise real**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.