http://journal.unoeste.br/index.php/ce/index
DOI: 10.5747/ce.2020.v12.n3.e325
ISSN on-line 2178-8332

Colloquium Exactarum

Submetido: 31/07/2020 Revisado: 05/08/2020 Aceito: 08/09/2020

ANÁLISE DA INTEGRIDADE E DA INSTABILIDADE DINÂMICA DE UM SISTEMA MECÂNICO SUJEITO A BIFURAÇÃO DO TIPO BUTTERFLY

ANALYSIS OF THE INTEGRITY AND DYNAMIC ISNTALILITY OF A MECHANICAL SYSTEM SUBJECT TO BUTTEFLY BIFURCATION

Michael Dowglas de Gois Silva, Fábio Roberto Chavarette, Milton Batista Ferreira Junior, Rodrigo Francisco Borges Lourenco

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP.
E-mail: michael@unirv.edu.br

RESUMO - Os sistemas estruturais esbeltos susceptíveis a flambagem instável geralmente perdem a estabilidade para níveis de carga mais baixos do que a carga de flambagem linear da estrutura perfeita. Isto se deve, principalmente, às imperfeições geométricas presentes em estruturas reais. O objetivo deste trabalho é determinar as medidas de integridade, juntamente com a estabilidade das soluções pós-críticas de um sistema mecânico sujeito a flambagem simétrica instável, bifurcação do tipo *Burtterfly*, utilizando um modelo discreto de um grau de liberdade. Serão considerados incertezas na ordem de 10% nos seus parâmetros determinísticos, para obter limites inferiores e de confiança para o projeto. A incerteza proposta nos parâmetros de rigidez das molas não modifica o tipo de bifurcação e o valor da carga crítica, apenas o valor do mínimo pós-crítico dos diagramas de bifurcação. Os resultados apresentaram a erosão da bacia de atração e o decréscimo dos fatores de integridade, local e global, para as soluções triviais com o incremento do carregamento estático, para a bifurcação investigada.
Palavras-chave: flambagem simétrica instável; bifurcação; bacia de atração; fator de integridade.

ABSTRACT - Slender structural systems susceptible to unstable buckling generally lose stability at lower load levels than the linear buckling load of the perfect structure. This is mainly due to the geometric imperfections present in real structures. The objective of this work is to determine the integrity measures, together with the stability of the post-critical solutions of a mechanical system subject to unstable symmetrical buckling, Burtterfly-type bifurcation, using a discrete degree of freedom model. Uncertainties in the order of 10% will be considered in its deterministic parameters, to obtain lower and reliable limits for the project. The proposed uncertainty in the spring stiffness parameters does not change the type of bifurcation and the value of the critical load, only the value of the minimum post-critical of the bifurcation diagrams. The results showed the erosion of the attraction

basin and the decrease of the factors of integrity, local and global, for the trivial solutions with the increase of the static load, for the investigated bifurcation.
Keywords: unstable symmetrical buckling, bifurcation, attraction basin, integrity factor.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos engenheiros e pesquisadores têm sido solicitados, cada vez com mais frequência, a estudar e projetar estruturas com um grau maior de complexidade. Com isso os efeitos não lineares se tornam cada vez maiores e difíceis de serem controlados. Fenômenos não lineares são, entretanto, indesejáveis. Evitam-se estes tipos de problemas projetando-se estruturas de tal modo que elas trabalhem em regime linear, isso porque tanto a análise estática quanto a dinâmica de sistemas não lineares apresentam nas áreas de matemática e mecânica aplicada uma variedade de problemas de difícil solução.

Millon (1991) estudou a correlação entre as bifurcações e as oscilações não lineares de um sistema mecânico discreto com diferentes comportamentos pós-críticos, através de uma detalhada análise paramétrica. Para os vários tipos de bifurcação estudou-se, como o comportamento dinâmico varia com o nível de carregamento estático, com os parâmetros que caracterizam o carregamento dinâmico e com os parâmetros que caracterizam a rigidez do sistema estrutural. No presente trabalho, tem-se o mesmo modelo mecânico apresentado em Millon (1991), que é uma adaptação de um modelo barra rígida-mola já utilizado anteriormente no estudo da estabilidade elástica de sistemas estáticos.

A avaliação da segurança e da integridade de um sistema dinâmico não-linear é um assunto de muita importância em engenharia e não depende exclusivamente da estabilidade das soluções pós-crítica. Um método para se estudar a integridade de um sistema dinâmico é através da análise da evolução das bacias de atração de várias soluções. Essa questão foi abordada pela primeira vez por Thompson (1989) e tem recebido atenção recentemente para a determinação de duas importantes medidas de segurança das bacias de atração: o fator de integridade local (FIL) e o fator de integridade global (FIG), que medem a máxima região segura e contínua da bacia de atração em torno de um dos atratores da resposta dinâmica (REGA; LENCI, 2005). Essas medidas de segurança têm sido aplicadas a diversos sistemas mecânicos ou contínuos (REGA; LENCI, 2008; SILVA; GONÇALVES, 2015).

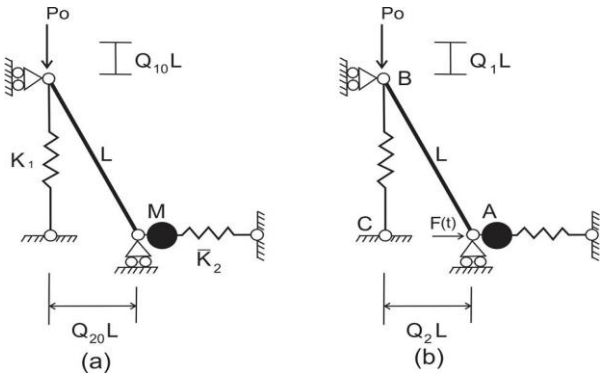
O objetivo deste trabalho é determinar as medidas de integridade, juntamente com a estabilidade das soluções pós-críticas de um sistema mecânico sujeito a flambagem simétrica instável, do tipo *Burtterfly*, utilizando um modelo discreto de um grau de liberdade. O enfoque será dado à influência do nível de carregamento estático e de incertezas nos parâmetros de rigidez das bacias de atração estáticas do sistema e, consequentemente, sobre as medidas de integridade do sistema.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O modelo representado na Fig. 1 consiste numa barra rígida de peso desprezível, comprimento L, presa por duas molas: uma mola vertical de rigidez linear k1 e uma mola de rigidez $\bar{k}_2$ que pode ser linear se η for igual a zero e não linear caso η seja igual a um, (ver eq.1) e uma massa concentrada M fixa no ponto A. Segundo Millon (1991) modelos semelhantes a esse têm sido frequentemente usados para representar e

estudar de maneira simplificada o comportamento de elementos estruturais tais como colunas, arcos, cascas e placas.

Figura 1. Sistema massa-mola-barra rígida com um grau de liberdade: (a) Estático (b) Dinâmico.



Fonte: Millon (1991)

A rigidez $\bar{k}_2$ é representada pela seguinte equação:

$$\bar{k}_2 = k2\left[1+\eta\begin{pmatrix}\alpha Q_{20}+\beta {Q_{20}}^2\\ +\gamma {Q_{20}}^3+\delta {Q_{20}}^4\end{pmatrix}\right] \quad (1)$$

onde Q_{20} é o deslocamento associado à mola não linear $\bar{k}_2$ e α, β, γ e δ são parâmetros que inserem não linearidades geométricas no sistema criando diferentes mecanismos de bifurcação dependendo da potência dos deslocamentos Q_{20}. Esta equação pode ser utilizada para exemplificar os vários tipos de comportamento pós-crítico que ocorrem em vários sistemas estruturais. Será estudado o caso específico *Butterfly*, que possui parâmetros que regem a não linearidade da mola $\bar{k}_2$.

A partir do modelo proposto por Silva (2016), da equação de Lagrange e da aplicação do princípio de Hamilton, obtém-se a seguinte equação de movimento do sistema:

$$\frac{d^2Q_2}{d\tau^2}+2\xi\frac{dQ_2}{d\tau}+[\lambda-P_0]\left(\frac{Q_{2t}}{\sqrt{1-{Q_{2t}}^2}}\right)$$
$$+[1-\lambda]Q_{2t}+\eta\left(\alpha {Q_{2t}}^2+\beta {Q_{2t}}^3+\gamma {Q_{2t}}^4\right.$$
$$\left.+\delta {Q_{2t}}^5\right)=f(\tau) \quad (2)$$

Para se estudar a bifurcação *Butterfly*, simplifica-se a eq. (2) adotando os seguintes parâmetros: $\lambda=4, \beta=-6, \delta=4, \alpha=0$ e $\gamma=0$. Sendo assim o caminho pós-crítico para esse caso regido a partir da seguinte equação:

$$P_0=\sqrt{1-{Q_{20}}^2}\left(4\left(\frac{1}{\sqrt{1-{Q_{20}}^2}}-1\right)\right.$$
$$\left.+\left(1-6{Q_{20}}^2+4{Q_{20}}^4\right)\right) \quad (3)$$

Para o caso de molas não lineares a expressão da frequência natural relativa ao estado fundamental de equilíbrio é igual ao caso linear, a saber:

$$\varpi_0=\sqrt{1-P_0} \quad (4)$$

Para $Q_{20}\neq 0$, ou seja, no caminho pós-crítico, obtém-se a seguinte equação para frequência natural em função do carregamento estático:

$$\varpi_0=\left\{[\lambda-P_0]\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-{Q_{20}}^2\right)^3}}\right)+[1-\lambda]+\right.$$
$$\left.\left(2\alpha Q_{20}+3\beta {Q_{20}}^2+4\gamma {Q_{20}}^3+5\delta {Q_{20}}^4\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste trabalho serão considerados incertezas na ordem de 10% nos parâmetros determinísticos da bifurcação do tipo *"Butterfly"*. Serão considerados os resultados para as seguintes incertezas nos parâmetros da mola não linear: $\beta=-5.4, \beta=-6.6, \delta=3.6, \delta=4.4$.

A Figura 2a representa os caminhos pós críticos para a bifurcação do tipo *"Butterfly"* considerando toda a variabilidade dos seus parâmetros numéricos. Observa-se nesta figura que a bifurcação do caminho pós-critico inicial é simétrica instável. A incerteza proposta nos parâmetros de rigidez das molas não modifica o tipo de bifurcação

e o valor da carga crítica, apenas o valor do mínimo pós-crítico dos diagramas de bifurcação.

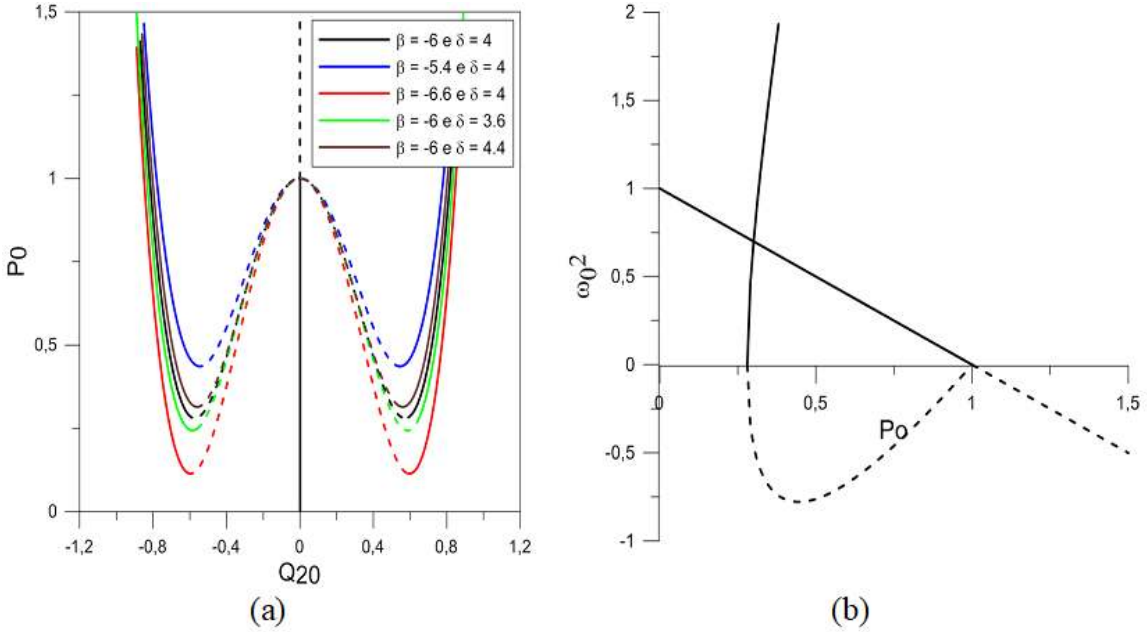
A Figura 2b ilustra a relação $\varpi_0{}^2$ vs $\overline{P_0}$ para o caso *"Butterfly"* obtida a partir da eq. (5) apenas para os valores nominais dos parâmetros numéricos. Nesta figura, observa-se que o trecho linear, correspondente ao caminho fundamental de equilíbrio, que apresenta frequências naturais imaginárias a partir da carga crítica de flambagem, indicando que a partir desse valor de carregamento o caminho fundamental de equilíbrio é instável. Já o trecho curvo desta figura representa a variação da frequência ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio, sendo que as frequências imaginárias estão associadas ao trecho inicial do caminho pós-crítico, passando a serem reais após atingirem o carregamento mínimo pós-crítico.

Em seguida foram obtidas as bacias de atração estáticas, *F*(t) = 0, para o caso de bifurcação avaliados neste trabalho, considerando-se as incertezas na ordem de 10% nos parâmetros determinísticos.

Para o traçado das bacias foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que apresenta boa estabilidade numérica para integrar o problema de valor inicial ao longo do tempo. O atrator de cada condição inicial, pertencente do plano que varia tanto os deslocamentos quanto a velocidade do sistema discreto dentro do intervalo de [-1,1], é mapeado e agrupado em cores diferentes. Este método consiste em discretizar o plano desejado para calcular a bacia de atração em um conjunto de células, avaliando a convergência dessas condições iniciais para um determinado atrator. Os eixos horizontais simbolizam a variação da condição inicial de deslocamento $Q_2(\tau)$ e enquanto os eixos verticais varia-se a condição inicial de velocidade, $\mathrm{d}Q_2(\tau)/\mathrm{d}\tau$.

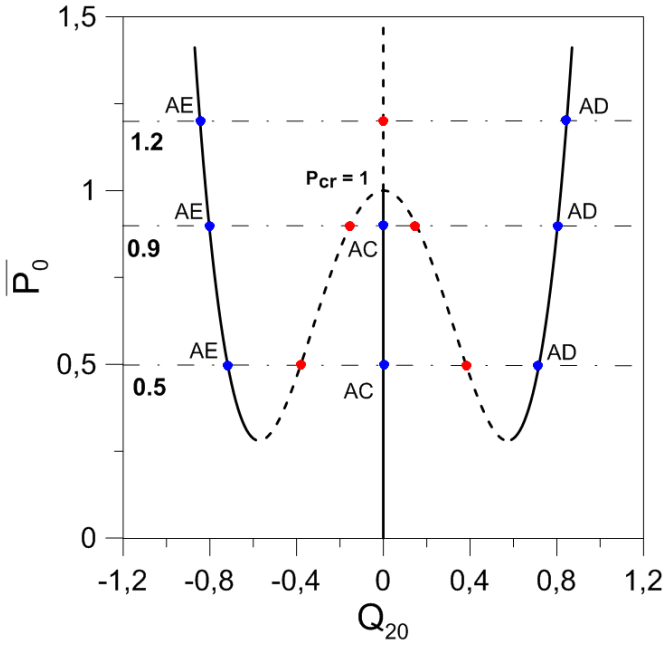
Nas Figs. 4 e 5 estão representadas, respectivamente, as bacias de atrações considerando-se as incertezas no parâmetro *β* e δ para a bifurcação do tipo *Butterfly* além de se avaliar vários níveis de carregamento estático conforme representado na Figura 3.

Figura 2. (a) Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo Butterfly considerando a incerteza em seus parâmetros e (b) e relação $\varpi_0{}^2$ versus $\overline{P_0}$ para λ=4, β = -6, δ = 4, α = 0 e γ = 0.



Fonte: Os autores.

Figura 3 –Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Butterfly* para vários níveis de carregamento.



Fonte: Os autores.

Para o tipo de bifurcação *Butterfly* o nível de carregamento estático igual 0.5 e 0.9 apresentam três soluções estáveis (ponto azul), sendo uma delas trivial (atrator central AC), e duas soluções instáveis (ponto vermelho) conforme ilustra a Figura 3. Já para o carregamento estático igual 1.2, a solução trivial passa a ser instável (ponto vermelho) e o sistema passa apresentar apenas duas soluções estáveis (ponto azul), sendo um atrator esquerdo (AE) e outra o atrator direito (AD), como apresentado na Figura 3.

Nota-se que à medida que aumenta-se o carregamento, independentemente do valor da incerteza, maior é a tendência das condições iniciais da bacia de atração se estabilizar no foco esquerdo (região de cor preta) ou direito (região de cor amarela), minimizando a região do foco central (região de cor azul), como esperado.

Foram estudados os fatores de integridades locais e globais do sistema com bifurcação *Butterfly*. O fator de integridade local (FIL) é a maior circunferência centrada no atrator da bacia de atração que pode ser obtida de tal forma a garantir o maior conjunto de condições iniciais que convertem para o referido atrator. Já o fator de integridade global (FIG) é a maior circunferência centrada em uma determinada condição inicial da bacia de atração que pode ser obtida de tal forma a garantir o maior conjunto de condições iniciais que convertem para o mesmo atrator da condição inicial que está no centro da circunferência (SILVA; GONÇALVES; REGA; LENCI, 2011.)

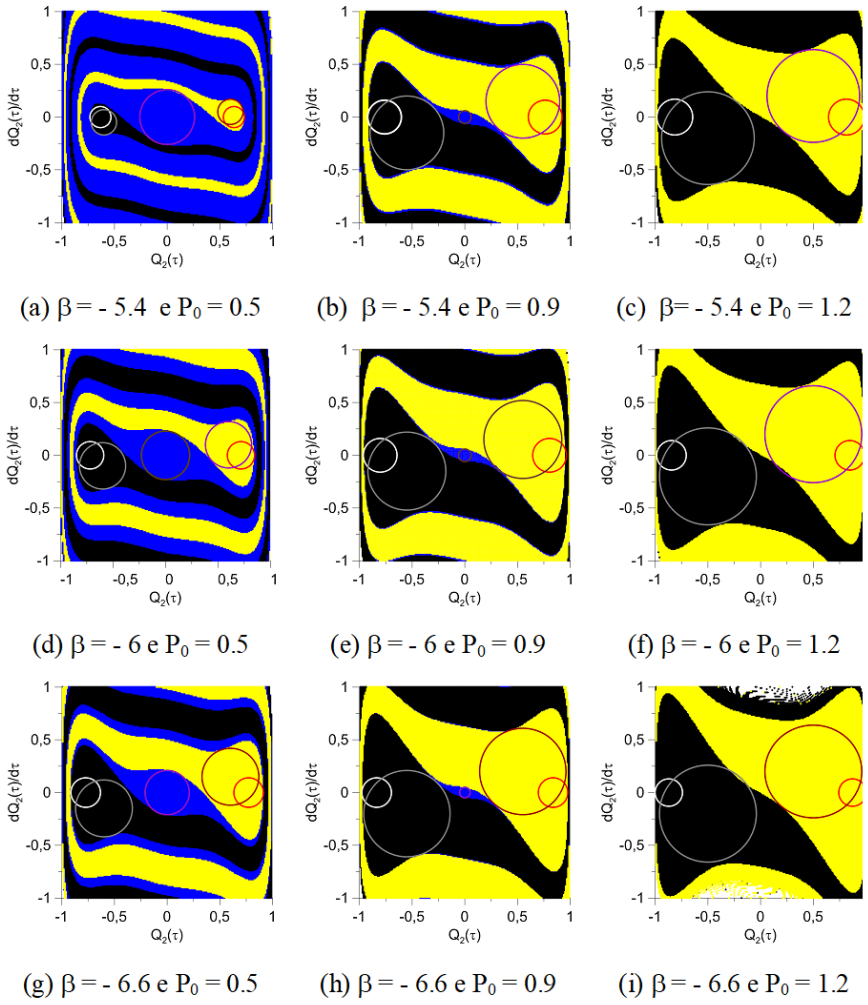
Tabela 1. Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*.

Parâmetros		P_0											
β	δ	0.5				0.9				1.2			
		Local		Global		Local		Global		Local		Global	
		AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE
-5.4	**4**	0,26	0,10	0,26	0,12	0,05	0,14	0,05	0,41	0,0	0,17	0,0	0,44
-6	**4**	0,23	0,13	0,23	0,22	0,06	0,16	0,06	0,37	0,0	0,14	0,0	0,46
-6.6	**4**	0,21	0,14	0,21	0,27	0,05	0,14	0,05	0,41	0,0	0,13	0,0	0,46
-6	**3.6**	0,22	0,14	0,22	0,25	0,06	0,15	0,06	0,39	0,0	0,13	0,0	0,46
-6	**4.4**	0,24	0,12	0,24	0,18	0,06	0,15	0,06	0,37	0,0	0,16	0,0	0,44

Fonte: Os autores.

Os fatores de integridades estão apresentados pelas regiões delimitada pelos círculos nas bacias das Figs. 4 e 5. O valor dos fatores de integridade (raio da circunferência), local e global, com os parâmetros analisados para a bifurcação do tipo *Butterfly* estão relacionados na Tabela 1, sendo AC (atrator central) e AE (atrator esquerdo). Não foram apresentados os fatores de integridade local e global AD (atrator direito) já que a solução pós-crítica é simétrica para este caso de bifurcação.

Figura 4. Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza no parâmetro β . $\delta = 4$.



(a) $\beta = -5.4$ e $P_0 = 0.5$ (b) $\beta = -5.4$ e $P_0 = 0.9$ (c) $\beta = -5.4$ e $P_0 = 1.2$

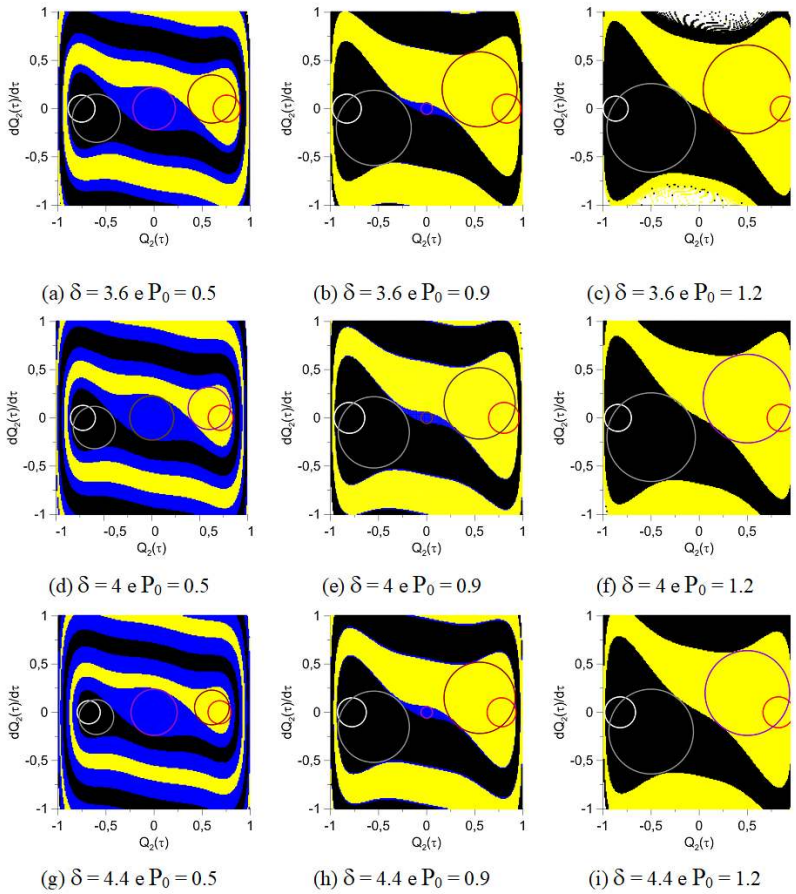
(d) $\beta = -6$ e $P_0 = 0.5$ (e) $\beta = -6$ e $P_0 = 0.9$ (f) $\beta = -6$ e $P_0 = 1.2$

(g) $\beta = -6.6$ e $P_0 = 0.5$ (h) $\beta = -6.6$ e $P_0 = 0.9$ (i) $\beta = -6.6$ e $P_0 = 1.2$

Fonte: Os autores.

Observa-se a partir da Tab. 1 que o fator de integridade, local e global, do atrator central (solução trivial), para um mesmo do valor β e δ, diminui com o incremento da carga estática P_0, tornando-se nula para qualquer valor de carregamento superior ao valor da carga crítica, como ilustrado nas Figuras 6(a) e 7(a). Já para o atrator esquerdo (solução pós-crítica) ocorre o aumento do fator de integridade, local e global, com o incremento de P_0, para um mesmo do valor valor β e δ, como apresentado nas Figuras 6(b) e 7(b).

Figura 5. Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza no parâmetro δ . β = -6.



Fonte: Os autores.

Figura 6 – Fator de integridade local para a bifurcação do tipo *Butterfly*: Atrator (a) Central (b) Esquerdo

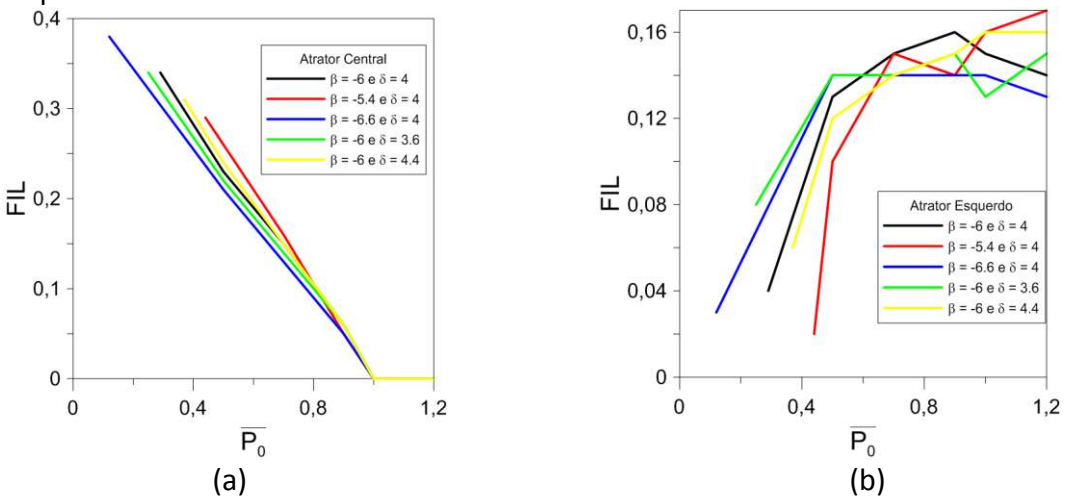
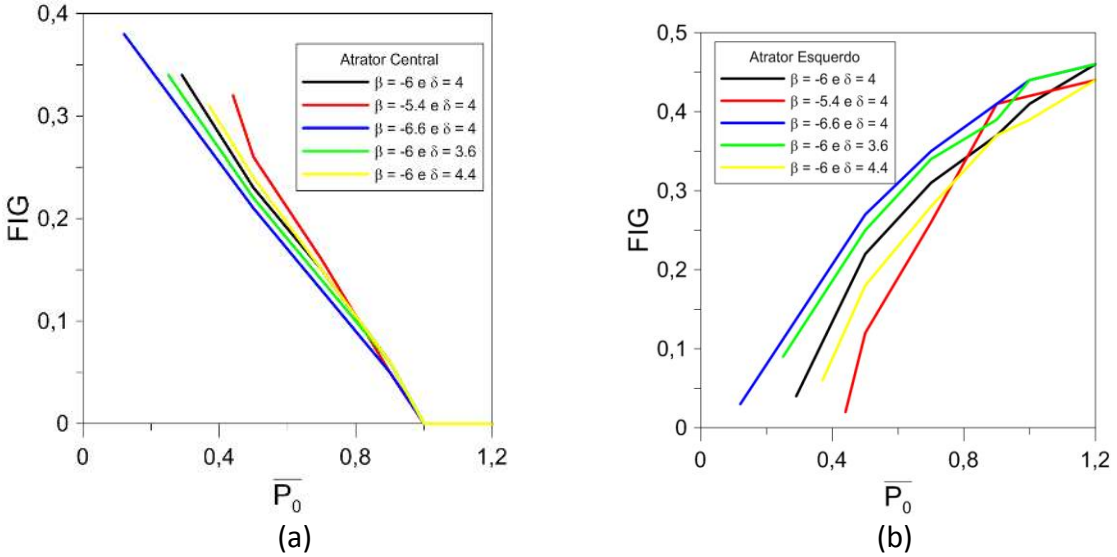


Figura 7 - Fator de integridade global para a bifurcação do tipo *Butterfly*: Atrator (a) Central (b) Esquerdo



Fonte: Os autores.

Ainda a partir da Tabela 1 e das Figuras 6 e 7, observa-se que o fator de integridade, local e global, para uma carga estática, $\overline{P_0}$, próxima do valor mínimo pós-crítico, sofre uma significativa variação quando se considera uma incerteza nos parâmetro β e δ, sendo essa variação menos significativa para valores elevados de carga estática.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, avaliou-se, para um sistema mecânico discreto susceptível a flambagem simétrica instável, a influência de incertezas nos parâmetros de rigidez do sistema nas bacias de atrações.

Quanto a rigidez do sistema discreto, dependendo dos valores iniciais da mola não linear é possível obter repostas pós-críticas com diferentes topologias, que neste trabalho foi considerada a bifurcação *Butterfly*.

Foram traçadas diversas bacias de atração para diferentes valores de carregamento estático e com incerteza nos parâmetros de rigidez da mola não linear, verificando o comportamento pós-crítico e a mudança das bacias de atração e das medidas de segurança com o carregamento estático e a incerteza.

A incerteza proposta nos parâmetros de rigidez da mola não linear não modifica o tipo de bifurcação, o comportamento pós-crítico dos sistemas discretos e o valor da carga crítica. Apenas o valor da carga mínima pós-critica dos diagramas de bifurcação é alterado com a incerteza.

Os resultados apresentaram a erosão da bacia de atração e o decréscimo dos fatores de integridade, local e global, para as soluções triviais com o incremento do carregamento estático, para a bifurcação investigada.

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; REGA, G.; LENCI, S. Global dynamics and integrity of a two-dof model of a parametrically excited cylindrical shell. **Nonlinear Dynamics**, [*S. l.*], v. 63, p. 61-82, 2011. https://doi.org/10.1007/s11071-010-9785-4

MILLON, S. L. J. **Técnicas gráficas e computacionais para a análise de oscilações não lineares e caos em sistemas estruturais suscetíveis à flambagem.** 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1991.

REGA, G.; LENCI, S. Dynamical integrity and control of nonlinear mechanical oscillators. **J. Vib. Control**., v. 14, p. 159–179, 2008.https://doi.org/10.1177/1077546307079403

REGA, G.; LENCI, S. Identifying, evaluating and controlling dynamical integrity measures in non-linear mechanical oscillators. **Nonlinear Anal**., v. 63, p. 902–914,2005) https://doi.org/10.1016/j.na.2005.01.084

SILVA, M. D. G. **Aplicabilidade do polinômio de caos para a análise das oscilações não lineares de um sistema sujeito a flambagem**. 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil e Ambiental, Goiânia, GO, 2016.

SILVA, F. M. A.; BRAZÃO, A. F.; GONÇALVES, P. B. Influence of physical and geometrical uncertainties in the parametric instability load of an axially excited cylindrical shell. **Mathematical Problems in Engineering**, v., 2015, p. 1-18, 2015. https://doi.org/10.1155/2015/758959

THOMPSON, J. M. T. Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well**.** **Proc. R. Soc. Lond.,** A v. 421, n. 1861, p. 195–225, Feb. 1989. https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0009